

**СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
ФИЗИКИ**

**В.А.ГИНЗБУРГ
А.А.РУХАДЗЕ**

***В*ОЛНЫ
В МАГНИТОАКТИВНОЙ
ПЛАЗМЕ**

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи физических наук»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

В. Л. ГИНЗБУРГ, А. А. РУХАДЗЕ

ВОЛНЫ
В МАГНИТОАКТИВНОЙ
ПЛАЗМЕ

Издание второе, переработанное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

Водны в магнитоактивной плазме. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе. Монография. Издание второе, переработанное. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975.

Излагается последовательная теория распространения электромагнитных волн в плазме. Рассматривается плазма как материальная среда не только с частотной, но и пространственной дисперсией, обсуждаются общие вопросы линейной электродинамики сред с пространственной дисперсией, а также различные модели, используемые для описания бесстолкновительной плазмы, и области их применимости. Учитываются столкновения частиц в полностью ионизованной и слабоионизованной плазме. Подробно обсуждается модель, описываемая с помощью кинетического уравнения. На основе этой модели рассчитывается диэлектрическая проницаемость изотропной и анизотропной плазмы при отсутствии внешних полей. Освещен также вопрос о поведении плазмы во внешнем электрическом поле.

Центральное место в книге занимает исследование распространения волн в плазме. Рассматриваются волны в однородной и изотропной плазме в отсутствие внешних полей, затем волны в однородной магнитоактивной плазме (холодной и горячей). Обсуждается устойчивость однородной анизотропной плазмы.

Последние параграфы книги посвящены весьма актуальным вопросам — волнам в неоднородной и неравновесной плазме и устойчивости магнитного удержания плазмы.

Табл. 12. Рис. 12. Библ. 82 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию	7
Из предисловия к первому изданию	8
Принятые обозначения	9
Введение	11
§ 1. Плазма как материальная среда, в которой существенна как частотная, так и пространственная дисперсия. Некоторые параметры лабораторной, ионосферной и межпланетной плазмы	13
§ 2. Основы линейной электродинамики сплошных сред	24
§ 3. Различные модели, используемые для описания плазмы а) Движение отдельных частиц (36). б) Гидродинамическая модель (41). в) Кинетическое уравнение с самосогласованным полем (43). г) Квазигидродинамическое приближение для бесстолкновительной плазмы (46).	36
§ 4. Столкновения частиц в плазме а) Интеграл столкновений в полностью ионизованной плазме (52). б) Квазигидродинамическое приближение для полностью ионизованной плазмы (57). в) Столкновения частиц в слабоионизованной плазме (64). г) Квазигидродинамика слабоионизованной плазмы (66). д) О границах применимости линейного приближения (69).	51
§ 5. Диэлектрическая проницаемость изотропной и однородной плазмы при отсутствии внешних полей	73
§ 6. Волны в однородной и изотропной плазме а) Продольные волны (84). б) Поперечные волны (94) .	84
§ 7. Тензор диэлектрической проницаемости однородной магнитоактивной плазмы	101
§ 8. Волны в однородной магнитоактивной плазме а) Электромагнитные волны в холодной магнитоактивной плазме (114). б) Электромагнитные волны в плазме с горячими электронами (124). в) Циклотронные волны (129).	112

§ 9. Колебания и устойчивость однородной анизотропной плазмы. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой	139
а) Неустойчивость однородной плазмы с анизотропным давлением (140). б) Взаимодействие электронного пучка малой плотности с высокочастотными колебаниями плазмы (149).	
§ 10. Плазма во внешнем электрическом поле	160
а) Плазма в постоянном электрическом поле. Неустойчивость анизотропной плазмы с током (161). б) Плазма в сильном высокочастотном поле. Параметрическая неустойчивость (169).	
§ 11. Волны в неоднородной плазме (приближение геометрической оптики)	177
§ 12. Высокочастотные волны в неоднородной магнитоактивной плазме	196
§ 13. Дрейфовые колебания неоднородной плазмы. Проблема устойчивости магнитного удержания плазмы . .	206
а) Дрейфовые колебания плазмы (213). б) Неустойчивость анизотропной плазмы с током (223).	
§ 14. Волны в пространственно ограниченной плазме . .	234
а) Поверхностные волны в полубесконечной плазме с резкой границей (235). б) Неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем (243).	
Литература	252

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Для второго издания написаны два новых раздела, посвященных плазме во внешнем электрическом поле и рассмотрению ограниченной плазмы. Заново написан также раздел, касающийся взаимодействия электронного пучка с высокочастотными колебаниями плазмы. Кроме того, при подготовке настоящего издания книги были учтены некоторые уточнения, внесенные в английское издание (*Handbuch der Physik* 49/4, 395, 1972), и сделан целый ряд других небольших редакционных изменений.

Мы надеемся, что все это оправдывает появление нового издания, тем более, что первое издание давно разошлось и стало сравнительно трудно доступным; в то же время, насколько нам известно, книга нашла значительное число читателей.

Пользуемся возможностью поблагодарить за замечания Е. М. Лифшица и редактора английского издания К. Рауера, а также Л. С. Богданкевич за многочисленные советы и помощь при переработке книги.

1974 г.

В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В монографии излагается последовательная теория распространения электромагнитных волн в плазме на основе электродинамики материальных сред с частотной и пространственной дисперсией. При этом мы, наряду с теорией распространения электромагнитных волн в равновесной и однородной плазме, излагаем также вопросы теории колебаний и устойчивости пространственно неоднородной и неравновесной плазмы. Именно эти направления за последние годы получили существенное развитие и до настоящего времени находятся в центре внимания. Поэтому мы надеемся, что предлагаемая монография окажется полезной для достаточно широкого круга читателей.

Авторы признательны А. В. Гуревичу за замечания, сделанные им при чтении рукописи.

1969 г.

В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ *)

E — напряженность электрического поля;

B — магнитная индукция;

D — электрическая индукция;

Φ — потенциал электрического поля;

j — плотность полного тока;

ρ — плотность заряда;

$\sigma_{ij}(\omega, k)$ — тензор комплексной проводимости;

$\varepsilon_{ij}(\omega, k)$ — тензор комплексной диэлектрической проницаемости;

$$\omega_{N\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{m_{\alpha}}} \text{ — лепгмюровская частота частиц;}$$

$$\omega_{B\alpha} = \frac{e_{\alpha} B}{m_{\alpha} c} \text{ — ларморовская частота частиц;}$$

$$r_{D\alpha} = \frac{v_{T\alpha}}{\omega_{N\alpha}} = \sqrt{\frac{T_{\alpha}}{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}} \text{ — дебаевский радиус частиц;}$$

$$r_D^{-2} = \sum_{\alpha} r_{D\alpha}^{-2};$$

$\rho_{\alpha} = v_{T\alpha} / \omega_{B\alpha}$ — ларморовский радиус частиц;

$\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon_{ij}(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2}$ — «продольная» диэлектрическая проницаемость;

$\varepsilon^l(\omega, k)$ — продольная диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы;

$\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ — поперечная диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы;

$\varepsilon_{ij}^a, \varepsilon_{ij}^a$ — эрмитовская и антиэрмитовская части тензора диэлектрической проницаемости;

$\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ — комплексная частота, ω — частота, γ — декремент затухания (инкремент нарастания) колебаний;

*) Редко встречающиеся обозначения не приводятся. Индекс $\alpha = e, i, n$ соответствует электронам, ионам и нейтральным молекулам плазмы. Заряд, масса частиц, скорость света и постоянная Планка обозначены, как обычно, через $e_{\alpha}, m_{\alpha}, c, \hbar$.

k — волновой вектор; k_z и k_{\perp} — проекции волнового вектора вдоль и поперек внешнего магнитного поля;

$n = \mu' + i\kappa$ — комплексный показатель преломления, μ — показатель преломления, κ — коэффициент поглощения;

N_{α} — плотность частиц;

T_{α} — температура частиц;

$$v_{T\alpha} = \sqrt{\frac{T_{\alpha}}{m_{\alpha}}} \text{ — тепловая скорость частиц;}$$

$\nu_{\alpha\beta}$ — частота столкновений частиц сорта α с частицами сорта β ;

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} \text{ — фазовая скорость волны;}$$

$$v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \text{ — групповая скорость волны;}$$

$f_{\alpha}(v, r, t)$ — функция распределения частиц;

$V_{\alpha}(r, t)$ — гидродинамическая скорость частиц;

U_{α} — направленная скорость частиц;

$$v_A = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi N_i M}} \text{ — альвеновская скорость;}$$

$$v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M}} \text{ — скорость ионного звука;}$$

m, M — массы электрона и иона;

$$Z = \left| \frac{e_i}{e} \right| \text{ — отношение зарядов иона и электрона;}$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}$ — интеграл столкновений частиц сорта α с частицами сорта β ;

$$L = \ln \frac{r_D}{r_{min}} \text{ — кулоновский логарифм;}$$

L_0 — характерный размер неоднородности плазмы;

$\Psi(r)$ — эйконал, $k = \nabla \Psi(r)$;

θ — угол между векторами k и B_0 ;

$$\omega_{др \alpha} = \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega_{Bz} L_0} \text{ — дрейфовая частота частиц сорта } \alpha;$$

$$A_s(x) = e^{-x} I_s(x);$$

$$J_+(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{i\infty}^x d\tau e^{\frac{\tau^2}{2}};$$

$$v_{эфф} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^4 Z^2 N_i L}{T_e^{3/2}} = v_{ei};$$

$$v_{ii} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \frac{e^4 Z^4 N_i L}{T_i^{3/2}}.$$

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей монографии состоит в изложении теории распространения электромагнитных волн в плазме. При исследовании распространения волн в плазме приходится сталкиваться с большим числом различных задач. Сюда относятся вопросы рефракции, поглощения и усиления радиоволн в плазме, ее нагрева и ускорения электромагнитными волнами, рассеяния и трансформации волн в плазме, колебаний ограниченной и неоднородной плазмы; наконец с исследованием распространения и поглощения волн в высокотемпературной плазме тесно связана центральная проблема теории управляемого термоядерного синтеза — проблема устойчивости плазмы.

Литература, посвященная всем этим вопросам, огромна. В связи с этим подчеркнем, что ниже не делается попытки дать обзор соответствующих работ. Мы стремились лишь изложить основы теории распространения электромагнитных волн в плазме и в общих чертах осветить отдельные конкретные вопросы с единой точки зрения. Именно, мы имеем в виду развитую в последние годы электродинамику плазмы как материальной среды, в которой существенна не только частотная, но и пространственная дисперсия. В рамках такой электродинамики и излагается в настоящей монографии теория распространения электромагнитных волн в плазме.

Нам кажется, что ознакомление с такой общей теорией сильно облегчит читателю разбор целого ряда оригинальных статей, посвященных этому кругу вопросов. Иллюстрации общей теории будут касаться конкретных явлений, возникающих при распространении электромагнитных волн в ионосфере и прилегающих к ней областях межпланетного пространства, а также в высокотем-

пературной плазме в установках для управляемого термоядерного синтеза. Однако и здесь мы ни в коей мере не претендуем на полноту рассмотрения и осветим лишь некоторые наиболее важные явления.

Подробное обсуждение различных приложений теории распространения волн в плазме читатель может найти в монографиях В. Л. Гинзбурга [1], В. П. Силина и А. А. Рухадзе [2], А. И. Ахиезера и др. [3], А. Г. Ситенко [4], Т. Х. Стикса [5], А. Б. Михайловского [6], а также в сборниках [7] (см. обзорные статьи В. Д. Шафранова, т. 2, 3; А. Б. Михайловского, т. 3; Б. Б. Кадомцева, т. 2, 4, 5 и А. А. Иванова, т. 6).

§ 1. ПЛАЗМА КАК МАТЕРИАЛЬНАЯ СРЕДА, В КОТОРОЙ СУЩЕСТВЕННА КАК ЧАСТОТНАЯ, ТАК И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ. НЕКОТОРЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЛАБОРАТОРНОЙ, ИОНОСФЕРНОЙ И МЕЖПЛАНЕТНОЙ ПЛАЗМЫ

Плазма представляет собой ионизованный газ, содержащий большое количество заряженных частиц, а иногда также нейтральных атомов и молекул. Несмотря на наличие заряженных частиц, плазма обычно, как говорят, квазинейтральна. Это означает, что в достаточно больших объемах и за достаточно большие промежутки времени плазму можно считать электрически нейтральной системой. Специфические особенности плазмы проявляются тогда, когда пространственное распределение заряженных частиц в ней становится неоднородным и возникают макроскопические электромагнитные поля (мы имеем в виду поля, которые заметно изменяются на расстояниях, много больших среднего расстояния между частицами в плазме; подробнее см. ниже). Электромагнитные поля в плазме могут, в частности, создаваться внешними источниками; важно, что эти поля влияют на движение заряженных частиц, индуцируя в плазме заряды и токи. Последние в свою очередь создают электромагнитное поле и тем самым изменяют полное поле в системе. Таким образом, в плазме имеет место самосогласованное действие частиц и поля друг на друга.

Уравнения поля в плазме с учетом индуцированных зарядов и токов, как и в любой материальной среде, можно записать в виде [8]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (\rho + \rho_0), & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ_0 и j_0 — плотности заряда и тока внешних источников поля, ρ и j — соответствующие плотности, индуцированные в плазме, а E и B — напряженность электрического поля и магнитная индукция. Запись уравнений поля в форме (1.1) оправдывается тем, что именно поля E и B имеют непосредственный физический смысл, так как входят в выражение для силы Лоренца, действующей со стороны поля на заряд e , движущийся со скоростью v :

$$F = e \left\{ E + \frac{1}{c} [vB] \right\}. \quad (1.2)$$

Поля E и B , а также ток j , которые фигурируют в уравнениях (1.1) и будут рассматриваться ниже, представляют собой статистические средние (средние в смысле статистической физики) от соответствующих микровеличин. Тем самым флуктуации не учитываются. Заметим, что в обычно встречающихся условиях, когда длина волны много больше среднего расстояния между частицами, средние статистические значения для полей совпадают с получаемыми в результате усреднения по «физически бесконечно малым» объемам или интервалам времени.

Уравнения поля (1.1) отличаются от уравнений поля в вакууме наличием индуцированного заряда ρ и тока j . Эти величины, однако, не являются независимыми; они связаны между собой уравнением непрерывности *)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (1.3)$$

Таким образом, можно считать, что в среде появляется одна дополнительная векторная величина j — плотность индуцированного тока. Причиной появления индуцированного тока в плазме, как уже отмечалось выше, являются поля E и B , а это означает, что плотность тока j представляет собой некоторый функционал полей E и B . Учитывая, что поле B с помощью уравнения $\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ всегда можно выразить через E , эту функциональную связь запишем в виде

$$j = \Phi(E). \quad (1.4)$$

*) При этом предполагается, что внешние источники ρ_0 и j_0 удовлетворяют аналогичному уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} j_0 = 0. \quad (1.3a)$$

Использование той или иной конкретной модели плазмы (или, что то же самое, модели, описывающей движение заряженных частиц плазмы под действием электромагнитного поля) как раз и необходимо для установления вида функциональной связи (1.4). Различные модели описания плазмы рассматриваются в § 3. Пока же мы обсудим некоторые необходимые для дальнейшего вопросы электродинамики плазмы, не конкретизируя явный вид соотношения (1.4).

Прежде всего заметим, что вместо j удобно ввести величину D :

$$D(r, t) = E(r, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' j(r, t'), \quad (1.5)$$

позволяющую в уравнениях (1.1) объединить плотность индуцированного тока с током смещения. Уравнения поля (1.1) при этом записываются в более простой форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= 4\pi\rho_0, & \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_0, & \operatorname{div} B &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь уже явно видно, что в материальной среде по сравнению с вакуумом появляется одна дополнительная векторная величина D . Величину D мы будем называть вектором электрической индукции, а соотношение

$$D = E + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \Phi(E), \quad (1.7)$$

устанавливающее функциональную связь между D и E , — материальным уравнением поля.

Уравнения (1.6) и (1.7) образуют полную систему уравнений поля, позволяющую решить любую электродинамическую задачу для плазмы. Граничные условия к этой системе получаются путем интегрирования уравнений по физически бесконечно тонкому пограничному слою. Так, из последнего уравнения (1.6) следует условие непрерывности нормальной к поверхности раздела сред составляющей поля

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.8)$$

Нормаль к поверхности раздела сред считается направленной из первой среды во вторую. Из второго уравнения (1.6) получаем условие непрерывности тангенциальной

составляющей поля E :

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (1.9)$$

Интегрирование первого уравнения (1.6) приводит к условию

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_0). \quad (1.10)$$

Здесь σ_0 — поверхностная плотность заряда внешних источников, а

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 dl \operatorname{div} [n | \mathbf{D}n |], \quad (1.11)$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности, а интегрирование ведется по нормали на бесконечно малой глубине поверхностного слоя раздела сред. Наконец, третье уравнение (1.6) дает

$$[n (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{i} + \mathbf{i}_0), \quad (1.12)$$

где \mathbf{i}_0 — поверхностная плотность тока внешних источников, а

$$\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 dl \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Соотношения (1.8) — (1.13) образуют полную систему граничных условий к уравнениям поля (1.6) и (1.7) и позволяют однозначно определить электромагнитное поле в любой части пространства. Появление поверхностных зарядов σ и токов \mathbf{i} в этих соотношениях обусловлено наличием производных по нормали к поверхности в материальном уравнении (1.7), о чем еще пойдет речь в § 14 *).

Ниже основное внимание уделяется линейным электромагнитным явлениям в плазме. При этом материальное уравнение (1.7), а также (1.4) по предположению являются линейными соотношениями. В наиболее общем виде такие

*) Следует отметить, что при выводе граничных условий (1.8) — (1.13) существенно предполагалось, что поля E и B как физические величины могут терпеть лишь конечные скачки, в то время как поле D на границе раздела сред может претерпевать бесконечные скачки.

линейные соотношения можно записать так:

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') E_j(\mathbf{r}', t'),$$

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') E_j(\mathbf{r}', t').$$
(1.14)

Из этих соотношений ясно, что состояние плазмы (индуцированные в ней заряды и токи) в заданный момент времени t и в точке \mathbf{r} может зависеть от поля во все предшествующие моменты времени (в соответствии с принципом причинности) и в любой точке плазмы *). Именно в этом и проявляются частотная (временная) и пространственная дисперсия плазмы. Физически частотная дисперсия связана с инерцией зарядов и процессами релаксации в плазме. Пространственная же дисперсия связана с возможностью передачи действия поля из одной точки плазмы в другую. Эта возможность обусловлена процессами переноса (упорядоченным движением) в плазме и тепловым движением частиц.

Для того чтобы более конкретно описать частотную и пространственную дисперсию, рассмотрим случай плазмы, однородной в пространстве и во времени **). Очевидно, что ядра интегральных соотношений (1.14) в этом случае являются разностными функциями времени и координат, т. е. зависят от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $t - t'$.

Электромагнитное поле в плазме с помощью разложения Фурье можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн, зависимость которых от координат и времени описывается функцией $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. В силу линейности уравнений поля достаточно рассмотреть лишь одну компоненту такого разложения, т. е. принять, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

*) Реально, однако, существенную роль играют ограниченная область пространства и ограниченный отрезок времени, определяемые пространственными и временными масштабами процессов переноса и релаксации в среде.

***) Речь, конечно, идет об однородности в среднем по времени или по ансамблю систем. Поскольку, как мы уже отмечали, рассматриваемые величины \mathbf{E} и \mathbf{B} (а также \mathbf{D}) являются статистическими средними, предположение об однородности среды вполне, в принципе, допустимо.

Такая же зависимость применяется для электрической и магнитной индукций D и B . Соотношения (1.14) для таких полей записываются в виде

$$\begin{aligned} j_i(\omega, \mathbf{k}) &= \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \\ D_i(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Тензор $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ называют тензором комплексной проводимости, а $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — тензором комплексной диэлектрической проницаемости. Общие свойства этих тензоров исследованы в монографиях [2, 9]. Здесь мы обсудим лишь некоторые из них.

Учитывая определение (1.5), легко установить следующую связь между тензорами $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ *):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}). \quad (1.17)$$

В дальнейшем поэтому мы будем говорить лишь о тензоре $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, имея в виду, что все рассуждения легко переносятся с помощью соотношения (1.17) и на тензор $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

Тензор $\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, t)$, очевидно, является вещественной функцией переменных \mathbf{r} и t , так как он связывает действительные величины $E(\mathbf{r}, t)$ и $D(\mathbf{r}, t)$. Тензор же $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, вообще говоря, является комплексной функцией даже для вещественных переменных ω и \mathbf{k} . При этом вещественность функции $\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, t)$ накладывает следующие ограничения на вещественную $\text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и мнимую $\text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ части тензора диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \text{Re } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \text{Re } \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \text{Im } \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -\text{Im } \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

*) Строго говоря, эта связь имеет вид [2]

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 8\pi^2 \delta_+(\omega) \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \quad \delta_+(\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{i}{2\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\omega},$$

где символ \mathcal{P} означает, что особенность при $\omega = 0$ следует понимать в смысле главного значения. Легко видеть, что при $\omega \neq 0$ эта формула совпадает с (1.17).

Таким образом, при вещественных ω и k вещественная часть тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$ является четной функцией частоты ω , а мнимая часть — нечетной. Это свойство часто будет использоваться в дальнейшем.

Зависимость тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$ от ω характеризует частотную дисперсию плазмы, а его зависимость от k учитывает пространственную дисперсию. Явный вид зависимости ε_{ij} от ω и k определяется из конкретной модели плазмы. Однако определенные суждения можно сделать, исходя из параметров плазмы и, в частности, из времен релаксаций, тепловых скоростей частиц, характерных частот и размеров плазмы.

В таблицах I—III приведены значения некоторых параметров ионосферной и межпланетной плазмы в зависимости от расстояния до поверхности Земли, частично заимствованные из книг [10, 11]. Эти значения следует рассматривать как ориентировочные, так как они постоянно меняются в зависимости от долготы и широты, времени года и суток; они существенным образом зависят также от солнечной активности (мы уже не говорим здесь о неточности измерений). Отметим, что на высотах 200—350 км от Земли (F -слой ионосферы) температура электронов может в 2—3 раза превышать температуру ионов (и нейтральных частиц), но как на меньших, так и на больших высотах это отличие менее существенно. В табл. IV указаны наиболее характерные параметры лабораторной плазмы, встречающейся в газовом разряде и установках для управляемого термоядерного синтеза. Естественно, эти значения также являются ориентировочными.

Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в области высоких частот, когда $\omega \gg \omega_{Ne} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$, $\omega \gg \omega_{Ve} = \frac{eB}{mc}$, мало отличается от диэлектрической проницаемости вакуума $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$. В этой области частот в плазме могут распространяться лишь поперечные электромагнитные волны, показатель преломления которых близок к единице, т. е. фазовая скорость близка к скорости света в вакууме, но поглощение которых полностью определяется свойствами плазмы. Из табл. III видно, что для ионосферной плазмы такая область частот лежит при $\omega > 10^8 \text{ сек}^{-1}$, а для лабораторной плазмы (см. табл. IV) — при $\omega \gg 10^{12} \text{ сек}^{-1}$. Теория распространения таких высокочастотных волн в плазме достаточно полно изложена

Параметры ионосферной плазмы

Высота, км	N_0 , см ⁻³	N , см ⁻³	T , °К	N/N_0	M	$B_0 = H_0$, э	$\beta = \frac{4\pi NT}{B_0^2}$
Ионосфера							
100	$(2 \div 4) \cdot 10^{13}$	$(0,2 \div 10) \cdot 10^4$	230	$10^{-10} \div 10^{-8}$	28	0,49	$(2 \div 100) \cdot 10^{-8}$
200	$3 \cdot 10^{10}$	$(0,3 \div 5) \cdot 10^5$	400 ÷ 800	$10^{-5} \div 10^{-6}$		0,45	$(4 \div 100) \cdot 10^{-7}$
300	$3 \cdot 10^9$	$(0,1 \div 2) \cdot 10^6$	10^3	$10^{-3} \div 10^{-4}$	24	0,44	$(4 \div 100) \cdot 10^{-6}$
400	$5 \cdot 10^8$	$(0,5 \div 1,5) \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^3$	$10^{-2} \div 10^{-3}$		0,40	$(3 \div 10) \cdot 10^{-5}$
500	$5 \cdot 10^7$	$(0,4 \div 1) \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^3$	$10^{-2} \div 10^{-1}$	20	0,37	$(4 \div 10) \cdot 10^{-5}$
700	$6 \cdot 10^6$	$(2 \div 5) \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^3$	10^{-1}		0,35	$(2 \div 5) \cdot 10^{-5}$
1000	10^5	10^5	$3 \cdot 10^3$	1	16	0,33	$2 \cdot 10^{-5}$
3000	1	$(5 \div 7) \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	10^4	14	0,16	$2 \cdot 10^{-6}$
$(3 \div 4) R_0$	—	$(3 \div 5) \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	—	1	10^{-2}	$(4 \div 20) \cdot 10^{-5}$
Межпланетный газ							
$100 R_0$	—	10^2	10^4	—	1	10^{-3}	$(3 \div 10) \cdot 10^{-3}$

*) R_0 — радиус Земли, N_0 — плотность нейтральных частиц, N — плотность заряженных частиц, T — температура в градусах Кельвина, M — средний молекулярный вес нейтральных частиц и ионов, H_0 — напряженность магнитного поля Земли (в наших обозначениях $H_0 = B_0$), β — отношение кинетического давления заряженных частиц к магнитному давлению.

Параметры ионосферной плазмы

Высота, км	$v_{ei}, \text{сек}^{-1}$	$v_{en}, \text{сек}^{-1}$	$v_e(n+i), \text{сек}^{-1}$	$v_{ii}, \text{сек}^{-1}$	$v_{in}, \text{сек}^{-1}$	$v_i(i+n), \text{сек}^{-1}$	$v_{Te}, \text{см/сек}$	$v_{Ti}, n, \text{см/сек}$	$l_{e,i}, \text{см}$
Ионосфера									
100	$6 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	3	10^3	10^3	$7,2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3,6
200	$2 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	0,1	9	10	$1,1 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$
300	10^3	10^3	$3 \cdot 10^3$	7	7	15	$1,5 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$
400	10^3	10^2	10^3	7	1	7	$1,2 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^4$	$1,8 \cdot 10^4$
500	$7 \cdot 10^2$	10	$7 \cdot 10^2$	3	0,1	3	$2,1 \cdot 10^7$	10^5	$3 \cdot 10^4$
700	$2 \cdot 10^2$	—	$2 \cdot 10^2$	1	—	1	$2,4 \cdot 10^7$	$1,3 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$
1000	40	—	40	0,2	—	0,2	$2,8 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$
3000	14	—	14	0,1	—	0,1	$3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
$(3 \div 4) R_0$	10^{-2}	—	10^{-2}	$3 \cdot 10^{-1}$	—	—	$3 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^9$
Межпланетный газ									
$100 R_0$	$3 \cdot 10^{-3}$	—	$3 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	—	—	$5 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$	10^{10}

*) v_{ei} и v_{en} — частоты столкновений электронов с ионами и нейтральными частицами, а $v_{e(n+i)}$ — полная частота столкновений электронов, v_{ii} , v_{in} и $v_{i(n+i)}$ — то же самое для ионов, $l_{e,i}$ — длины свободного пробега электронов и ионов, а v_{Te} и $v_{Ti,n}$ — тепловые скорости соответствующих частиц.

Параметры ионосферной плазмы

Высота, км	ω_{Ne} , сек ⁻¹	ω_{Ni} , сек ⁻¹	r_D , см	ω_{Be} , сек ⁻¹	ω_{Bi} , сек ⁻¹	$\frac{v_{Ti}}{\omega_{Bi}}$, см	$\frac{\omega_{Be}}{\omega_{Ne}}$	$\frac{\omega_{Bi}}{\omega_{Ni}} = \frac{v_A}{c}$	$\frac{v_{Te}}{\omega_{Be}}$, см
Ионосфера									
100	$(3 \div 20) \cdot 10^3$	$(2 \div 10) \cdot 10^4$	1	$8 \cdot 10^5$		0,9	$1,5 \cdot 10^2$	1	10^{-2}
200	$(1 \div 4) \cdot 10^7$	$(5 \div 20) \cdot 10^4$	0,2 ÷ 1	$7,9 \cdot 10^5$		1,5	$2,5 \cdot 10^2$	0,3	$2 \cdot 10^{-3}$
300	$(2 \div 8) \cdot 10^7$	$(1 \div 4) \cdot 10^5$	0,1 ÷ 0,7	$7,7 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^2$	2	$3,5 \cdot 10^2$	0,4	10^{-3}
400	$(4 \div 7) \cdot 10^7$	$(3 \div 5) \cdot 10^5$	0,2 ÷ 0,4	$7,3 \cdot 10^5$		2,5	$4 \cdot 10^2$	0,4	10^{-3}
500	$6 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^5$	0,3 ÷ 0,6	$7 \cdot 10^5$		3	$5 \cdot 10^2$	0,2	$2 \cdot 10^{-3}$
700	$(2 \div 4) \cdot 10^7$	$(1 \div 3) \cdot 10^5$	0,4 ÷ 0,7	$6,4 \cdot 10^5$		4	$6,5 \cdot 10^2$	0,2	$2 \cdot 10^{-3}$
1000	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$	1	$5,7 \cdot 10^5$	10^2	6	$1,5 \cdot 10^2$	0,3	$2 \cdot 10^{-3}$
3000	$5 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^4$	4	$2,8 \cdot 10^5$		10	$2 \cdot 10^2$	0,5	$5 \cdot 10^{-3}$
$(3 \div 4) R_0$	10^6	$2 \cdot 10^4$	30	$(1 \div 3) \cdot 10^5$	50	$2 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^4$	0,2	$4 \cdot 10^{-3}$
Межпланетный газ									
$100 R_0$	$5 \cdot 10^5$	10^4	50	$2 \cdot 10^4$	5	$2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-1}$

*) $\omega_{Ne} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$ — ленгмюровская частота электронов, $\omega_{Ni} = \sqrt{\frac{4\pi e_i^2 N_i}{M}}$ — то же самое для ионов,
 $r_D = \left(\sum_{e,i} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \right)^{-1/2}$ — дебаевский радиус, $\omega_{Be} = \frac{eB_0}{mc}$ и $\omega_{Bi} = \frac{e_i B_0}{Mc}$ — ларморовские частоты электронов и ионов, а $\frac{v_{Te}}{\omega_{Be}}$ и $\frac{v_{Ti}}{\omega_{Bi}}$ — их ларморовские радиусы.

Параметры лабораторной плазмы

Лабораторная плазма	$N, \text{см}^{-3}$	$N_0, \text{см}^{-3}$	$T_e, \text{°K}$	
Газовый разряд низкого давления	$10^8 \div 10^{14}$	$10^{12} \div 10^{17}$	$10^4 \div 10^5$	
Высокотемпературная плазма	$10^{11} \div 10^{14}$	$10^{11} \div 10^{12}$	$10^5 \div 10^7$	
Лабораторная плазма	$T_i, \text{°K}$	$V_0, \text{с}$	$L_0, \text{см}$	M
Газовый разряд низкого давления	$10^2 \div 10^3$	$10^2 \div 10^4$	$1 \div 3$	$1 \div 10^2$
Высокотемпературная плазма	$10^5 \div 10^7$	$10^4 \div 10^5$	$1 \div 10$	1

*) Учитывая широкие пределы изменения параметров лабораторной плазмы, мы здесь ограничились указанием лишь основных параметров. Обозначения те же, что и в таблицах I—III; L_0 — характерный размер неоднородности порядка радиуса плазмы.

в монографии [1] (см. также [2—5]), особенности распространения таких волн в ионосфере обсуждены в [10, 12]. Мы же здесь рассмотрим в основном волны в плазме в области более низких частот, когда $\omega \lesssim \omega_{Ne}$. В этой области частот, наряду с поперечными электромагнитными волнами в плазме, возможно распространение продольных плазменных волн ($\omega \approx \omega_{Ne}$), электронных и ионных циклотронных волн ($\omega \approx n\omega_{Ve}$, $\omega \approx n\omega_{Vi}$, где $\omega_{V\alpha} = \frac{e_\alpha B}{m_\alpha c}$, $\alpha = e, i$ — частота ларморовского вращения частиц, а $n = 1, 2, 3, \dots$) и, наконец, самых низкочастотных магнитозвуковых и магнитогидродинамических волн ($\omega \ll \omega_{Vi}$). Связь между волновым вектором и частотой для таких волн определяется из дисперсионного соотношения, которое будет подробно исследовано ниже. Существенно, что связи между ω и k оказываются самыми разнообразными. В тех случаях, когда фазовая скорость больше тепловых скоростей частиц плазмы, т. е. $\omega \gg kv_{T\alpha}$ (а при наличии

магнитного поля, когда $|\omega - n\omega_{Ba}| \gg k_z v_{T\alpha}$, $\omega_{Ba} \gg k_{\perp} v_{T\alpha}$, где k_z и k_{\perp} — соответственно компоненты волнового вектора вдоль и поперек магнитного поля), пространственным расплыванием поля волны из-за теплового движения частиц за период колебаний поля можно пренебречь. Это означает, что можно пренебречь пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости плазмы, обусловленной тепловым движением частиц. Анализ спектров таких высокочастотных колебаний плазмы является относительно простым и подобен используемому в обычной кристаллооптике [2, 9]. Если же $\omega \lesssim kv_{T\alpha}$, то пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости является существенной, а тепловое движение частиц играет определяющую роль при нахождении спектров колебаний плазмы. Спектры таких низкочастотных медленных волн кардинальным образом отличаются от спектров высокочастотных волн в плазме *).

§ 2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СЛОИШНЫХ СРЕД

Прежде чем перейти к исследованию электромагнитных свойств плазмы для конкретной модели, обсудим еще некоторые общие соотношения электродинамики сред с пространственной дисперсией.

В первую очередь остановимся на вопросе об энергии электромагнитного поля в такой среде.

Внешние источники, создающие поле в среде, естественно, изменяют энергию среды. Это изменение энергии обусловлено взаимодействием электромагнитного поля с источниками поля, или, иными словами, работой поля над внешними источниками. Чтобы вычислить изменение энергии среды, умножим второе из уравнений (1.6) на \mathbf{E} , а третье уравнение — на \mathbf{B} , после чего вычтем одно уравнение из другого. В результате, при учете тождества $\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$, сразу же получаем

$$\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \mathbf{j}_0 \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

*) Физический смысл и математическое содержание условий типа $\omega \gg kv_{T\alpha}$ и $\omega \ll kv_{T\alpha}$ особенно ясны из кинетического уравнения (см. § 3в), откуда видно, что при этом речь идет о сопоставлении членов $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}$ и $v \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r}$.

Интегрируя это соотношение по некоторому объему V , ограниченному поверхностью S , имеем

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) d\mathbf{r} = \\ = -\frac{c}{4\pi} \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{B}]_n dS - \int_V (\mathbf{j}_0 \mathbf{E}) d\mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Предположим теперь, что электромагнитное поле убывает на бесконечности, так что с увеличением объема (при $V \rightarrow \infty$) поверхностным интегралом в соотношении (2.2) можно пренебречь. Тогда выражение

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) d\mathbf{r} \quad (2.3)$$

представляет собой отнесенную к единице времени сумму изменения энергии поля и выделяющегося тепла, которая как раз равна мощности

$$- \int_V (\mathbf{j}_0 \mathbf{E}) d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

затрачиваемой внешними источниками поля.

Поверхностным интегралом в соотношении (2.2) при $V \rightarrow \infty$ можно пренебречь и в случае монохроматического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{B}^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{D} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{D}^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

с вещественными ω и \mathbf{k} . В самом деле, для такого поля поверхностный интеграл

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{B}]_n dS \quad (2.6)$$

не исчезает, но и не возрастает с увеличением объема V . Между тем объемный интеграл (2.3) при возрастании V также возрастает. Поэтому поверхностным интегралом (2.6) по сравнению с интегралом (2.3) можно пренебречь.

Подставляя выражения (2.5) в соотношение (2.2) и усредняя по времени (для интервалов времени значительно больших, чем $1/\omega$), получим следующее выражение для мощности, затрачиваемой внешними источниками поля в

единицу объема среды:

$$q = -\frac{1}{V} \int_V (\mathbf{j}_0 \mathbf{E}) d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{r} = \\ = i \frac{\omega}{4\pi} \{ \varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}) \} E_i E_j^*. \quad (2.7)$$

При получении этого выражения мы воспользовались материальным уравнением (1.15). Для монохроматического поля (2.5) с вещественными ω и \mathbf{k} картина стационарна, т. е. средняя по времени энергия поля не изменяется. Поэтому работа внешних сил целиком переходит в тепло. Следовательно, величина q представляет собой тепло, выделяющееся в единицу времени в единицу объема среды в поле плоской монохроматической волны (2.5) *).

Если тензор диэлектрической проницаемости среды для рассматриваемых вещественных ω и \mathbf{k} является эрмитовским тензором, т. е. $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$, то $q = 0$. Это означает, что при распространении в такой среде монохроматической волны тепло в среде не выделяется, а волна не поглощается средой. Таким образом, можно сказать, что за поглощение волн в среде ответственна антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости.

Зависимость тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от волнового вектора \mathbf{k} , т. е. учет пространственной дисперсии, приводит к тому, что даже в изотропной среде сохраняется тензорный вид диэлектрической проницаемости. Действительно, в изотропной и негиротропной среде кроме единичного тензора δ_{ij} можно составить также тензор $k_i k_j$. Поэтому в общем случае тензор диэлектрической проницаемости изотропной среды можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{lr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k). \quad (2.8)$$

Подставляя это выражение в (2.7), получаем, что в изотропной среде

$$q = \frac{\omega}{2\pi k^2} \{ \text{Im} \varepsilon^l(\omega, k) |\mathbf{kE}|^2 + \text{Im} \varepsilon^{lr}(\omega, k) [|\mathbf{kE}|^2] \}, \quad (2.9)$$

где $\text{Im} \varepsilon^l(\omega, k)$ и $\text{Im} \varepsilon^{lr}(\omega, k)$ — соответственно мнимые части компонент $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{lr}(\omega, k)$ при веществен-

*) Вопрос о тепле, выделяющемся в среде при комплексных ω и \mathbf{k} , является существенно более сложным; он подробно рассмотрен в монографии [9].

ных ω и k . Первое слагаемое этого выражения определяет поглощение продольного поля в среде (поля, в котором $E \parallel k$), а второе — поглощение поперечного поля (для такого поля $E \perp k$). Вообще, величины $\epsilon^l(\omega, k)$ и $\epsilon^{tr}(\omega, k)$ определяют характер распространения соответственно продольных и поперечных волн в изотропной среде (см. ниже). В связи с этим $\epsilon^l(\omega, k)$ и $\epsilon^{tr}(\omega, k)$ обычно называют продольной и поперечной диэлектрической проницаемостью.

Если среда находится в термодинамически равновесном состоянии, то любые электромагнитные волны в ней должны поглощаться, т. е. всегда $q > 0$. Из выражения (2.9) при этом следует, что в термодинамически равновесной изотропной среде

$$\text{Im } \epsilon^l(\omega, k) > 0 \quad \text{и} \quad \text{Im } \epsilon^{tr}(\omega, k) > 0. \quad (2.10)$$

Нарушение любого из этих неравенств может приводить к тому, что $q < 0$. А это означает, что возможна перекачка энергии от среды к электромагнитному полю. В такой среде возникшее флуктуационным образом поле будет нарастать со временем, уменьшая энергию среды, т. е. среда будет находиться в неустойчивом состоянии. Отметим, однако, что нарушение одного из условий (2.10) необходимо, но недостаточно для развития неустойчивости. Для развития неустойчивости, кроме того, нужно, чтобы в той области ω и k , в которой $\text{Im } \epsilon^l(\omega, k) < 0$, или $\text{Im } \epsilon^{tr}(\omega, k) < 0$, в среде без внешних источников поля ρ_0 и j_0 и при пренебрежении диссипацией могли распространяться электромагнитные волны, т. е. уравнения поля (1.6) и (1.7) без учета диссипации допускали нетривиальные решения с вещественными ω и k .

Возникает вопрос: какие же волны могут распространяться в среде при отсутствии внешних источников или, иными словами, в каких условиях выражения типа $\exp(-i\omega t + ikx)$ являются решениями однородной системы уравнений поля?

Если известно выражение для тензора диэлектрической проницаемости, на этот вопрос ответить легко. Это есть, по существу, вопрос о собственных электромагнитных колебаниях среды, или, по другой терминологии, о нормальных волнах в среде. Поэтому для того, чтобы ответить на него, рассмотрим, какие существуют нетривиальные решения уравнений поля (1.6) в отсутствие внешних источников.

Уравнения поля (1.6) для неограниченной и однородной среды в отсутствие внешних источников и в предположении о зависимости полей от координат и времени в виде $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ записываются так:

$$\begin{aligned} k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j &= 0, & [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \\ [\mathbf{kB}]_i &= \frac{\omega}{c} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j, & (\mathbf{kB}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эту систему уравнений легко свести к следующей системе трех алгебраических уравнений для компонент поля \mathbf{E} :

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = 0. \quad (2.12)$$

Условие разрешимости этой системы однородных уравнений и представляет искомое дисперсионное соотношение, которое определяет нетривиальные волновые решения уравнений поля в среде (1.6) и отвечает на поставленный выше вопрос. Это дисперсионное соотношение, очевидно, имеет вид

$$\text{Det}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (2.13)$$

В случае изотропной среды, когда тензор диэлектрической проницаемости имеет вид (2.8), система (2.12) распадается на два независимых уравнения (при $\omega \neq 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) \mathbf{E}^l &= 0, \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) \right] \mathbf{E}^{tr} &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\mathbf{E}^l = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2}$ — компонента электрического поля \mathbf{E} вдоль вектора \mathbf{k} , т. е. \mathbf{E}^l есть продольное поле, а $\mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2}$ — компонента поля \mathbf{E} поперек вектора \mathbf{k} , т. е. \mathbf{E}^{tr} — поперечное поле. Естественно, что и дисперсионное соотношение (2.13) в этом случае распадается на два соотношения:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 0, \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 0, \quad (2.15)$$

первое из которых представляет условие существования продольных волн в среде, второе — условие существования поперечных волн.

Дисперсионное соотношение (2.13) устанавливает связь между частотой ω и волновым вектором k для собственных (нормальных) электромагнитных колебаний среды. С помощью дисперсионного соотношения мы можем при заданном вещественном значении k определить частоту $\omega(k)$, или, как говорят, найти спектр собственных колебаний среды, и, наоборот, при заданном вещественном значении частоты ω можем найти проекцию волнового вектора $k(\omega)$ в любом заданном направлении. Эти два подхода соответствуют двум различным постановкам задачи при решении интегро-дифференциальных уравнений поля (интегральный характер этих уравнений обусловлен материальным уравнением (1.14)). Именно, речь может идти о «начальной» и граничной задачах. Рассмотрим эти задачи несколько подробнее.

Пусть в неограниченной и однородной среде в начальный момент времени $t = 0$ каким-то образом возникло электромагнитное поле (в результате флуктуаций или под действием внешних источников, которые при $t > 0$ перестали действовать). Рассмотрим изменение этого поля в среде со временем в отсутствие внешних источников. Для решения такой задачи недостаточно знания начальных значений $E(r, 0)$ и $B(r, 0)$, необходимо также задать начальное значение электрической индукции $D(r, 0)$, которое согласно соотношению

$$D_i(r, 0) = \int_{-\infty}^0 dt' \int d r' \hat{\epsilon}_{ij}(r - r', -t') E_j(r', t') \quad (2.16)$$

определяется всей «предысторией» поля $E(r, t)$ до момента $t = 0$. Физическая причина необходимости знания предыстории поля $E(r, t)$ обусловлена инерцией носителей тока и процессами релаксации в среде, или, иными словами, с временной (частотной) дисперсией среды. Если бы были заданы начальные условия не только для полей E и B , но также и параметры всех частиц среды при $t = 0$, то в знании предыстории поля E не было бы необходимости, ибо мы сразу могли бы вычислить $D(r, 0)$. Однако такая постановка задачи нереальна; значительно проще задать $E(r, t)$ для всех моментов $t < 0$.

Для решения поставленной начальной задачи воспользуемся преобразованиями Фурье — Лапласа [13]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \quad (t \geq 0), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Im } \omega = \sigma \geq 0).$$

Аналогично преобразуем также и электрическую и магнитную индукцию $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. При этом из уравнений поля (1.6) получаем

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) - [\mathbf{k}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})] = \frac{i}{c} \mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0), \quad \mathbf{k}\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) + [\mathbf{k}\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k})] = \frac{i}{c} \mathbf{D}(\mathbf{k}, t=0), \quad \mathbf{k}\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) = 0.$$

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{k}, t=0)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)$ — соответственно фурье-образы по пространственным координатам от начальных значений $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Система уравнений (2.18) при учете (1.9) легко сводится к следующей системе трех алгебраических уравнений:

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{i\omega}{c} D_i(\mathbf{k}, t=0) + \frac{i}{c} [\mathbf{k}\mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)]_i. \quad (2.19)$$

Эта система уравнений в отличие от (2.12) является неоднородной, и ее решение формально записывается в виде

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\Delta_i(\omega, \mathbf{k})}{\text{Det}(\omega, \mathbf{k})}, \quad (2.20)$$

где $\text{Det}(\omega, \mathbf{k})$ — детерминант (определитель) системы (см. (2.13))

$$\text{Det}(\omega, \mathbf{k}) = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right|, \quad (2.21)$$

а $\Delta_i(\omega, \mathbf{k})$ — соответствующее алгебраическое дополнение, которое зависит от правой части системы (2.19) (т. е. от начальных значений $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$).

Если теперь подставить решение (2.20) в преобразование Фурье — Лапласа, то получим поле при произвольных начальных его значениях. Для начального возмущения

в виде одной фурье-гармоники с заданным k имеем

$$E_i(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\Delta_i(\omega, k)}{\text{Det}(\omega, k)}. \quad (2.22)$$

Интеграл этот обычно вычисляется с помощью теории вычетов, в результате замыкания контура интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса. При этом существенную роль играют полюсы подынтегрального выражения внутри контура интегрирования (а также точки ветвления и другие особые точки). Здесь мы не будем останавливаться на всех тонкостях, возникающих при интегрировании выражения (2.22), в частности, на вопросах, связанных с точками ветвления подынтегральной функции. С этими вопросами читатель подробнее может познакомиться по монографиям [2, 14]. Рассмотрим лишь вклад в интеграл, обусловленный полюсами подынтегрального выражения, отвечающими нулям детерминанта системы (2.19):

$$\text{Det}(\omega, k) = 0. \quad (2.23)$$

Пусть корни этого уравнения, совпадающего с дисперсионным уравнением (2.13), равны $\omega_n(k)$. Тогда $\text{Det}(\omega, k)$ можно представить в виде произведений $\text{Det}(\omega, k) = \prod_n (\omega - \omega_n(k))$ и искомый вклад, равный сумме вычетов подынтегральной функции (2.22) в полюсах, приводит к следующей зависимости поля от времени *):

$$E(k, t) \sim \sum_n e^{-i\omega_n(k)t}. \quad (2.24)$$

Если для всех n (т. е. для всех корней) мнимая часть $\text{Im} \omega_n(k) < 0$, то члены этого ряда с ростом t уменьшаются и при достаточно больших временах существования остается лишь член с наименьшим декрементом затухания $\gamma_n = \text{Im} \omega_n(k)$. Если среди корней есть корень с $\text{Im} \omega_n = 0$, то соответствующий член суммы (2.24) вообще не затухает со временем и описывает незатухающие колебания среды (незатухающие нормальные волны). Наконец, если среди корней есть хотя бы один корень с $\text{Im} \omega_n(k) > 0$, то колебания данного типа будут нарастать

*) Заметим, что точки ветвления функции $\text{Det}(\omega, k)$ не приводят к чисто экспоненциальной зависимости поля от времени [2].

со временем. Это возможно лишь в случае, когда среда находится в неравновесном состоянии, которое является неустойчивым. При этом следует говорить об инкременте нарастания колебаний $\gamma_n = \text{Im } \omega_n(k)$.

Таким образом, мы убедились, что корни дисперсионного уравнения (2.13) определяют, помимо условий существования нетривиальных волновых решений уравнений поля без внешних источников, также и развитие во времени возникших в среде начальных возмущений, обусловленное свойствами самой среды, а не связанное с особенностями функций $\Delta_i(\omega, k)$ *). В этом, в частности, и состоит важное значение дисперсионного уравнения для всей линейной электродинамики сплошных сред.

Дисперсионное уравнение (2.13) определяет, конечно, не только изменение электромагнитного поля в среде во времени, но также и его изменение в пространстве. В частности, дисперсионное уравнение в значительной мере определяет характер проникновения и распространения поля в глубь среды при падении электромагнитной волны на ее границу. С другой стороны, тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, k)$, который фигурирует в дисперсионном уравнении (2.13), строго говоря, можно ввести только для неограниченной и пространственно однородной среды. Однако имеющая здесь место непоследовательность может оказаться вполне допустимой, когда размеры среды значительно больше длин волн исследуемых колебаний электромагнитного поля. В этом случае дисперсионное уравнение (2.13) будет правильно описывать пространственное изменение электромагнитных волн на расстояниях от границы, значительно превосходящих длину волны. На таких расстояниях пространственное изменение поля определяется свойствами самой среды, а не конкретными граничными условиями.

Если в задаче с начальными условиями мы искали комплексные решения дисперсионного уравнения $\omega_n(k)$ при вещественных значениях k , то при решении граничной задачи обычно определяют комплексную проекцию вектора k (ω) на заданное направление в предположении, что ω и две другие ортогональные проекции k (ω) вещественны. Пространственное изменение поля при этом

*) Вклады в интеграл (2.22), связанные с особенностями функций $\Delta_i(\omega, k)$, существенно зависят от начальных возмущений: при соответствующем «приготовлении» начальных состояний эти функции могут вообще не иметь особенностей.

определяется выражением вида

$$E(\mathbf{r}, t) \sim \sum_n e^{i\mathbf{k}_n(\omega)\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (2.25)$$

где $\mathbf{k}_n(\omega)$ удовлетворяют дисперсионному уравнению (2.13).

В общем случае $\mathbf{k}_n(\omega)$ — комплексные величины. Если $\text{Im } k_{n\theta}(\omega) > 0$ (здесь θ — угол между заданным направлением и вектором $\mathbf{k}_n(\omega)$), то волна будет затухать в данном направлении, в противоположном случае волна будет нарастать. Однако сделать вывод об устойчивости среды на основании знака $\text{Im } k_{n\theta}(\omega)$ уже нельзя. Для этого нужно либо строго решить граничную задачу, либо привлекать весьма сложные соображения [3], основывающиеся на видах дисперсионных кривых $k_{n\theta}(\omega)$. Вопрос об устойчивости среды значительно проще анализировать, исходя из начальной задачи, т. е. решая дисперсионное уравнение (2.13) относительно ω . Если известно, что среда устойчива, т. е. $\text{Im } \omega_n < 0$, то $\text{Im } k_{n\theta}(\omega)$ характеризует пространственное затухание данной «моды» колебаний в данном направлении, и, наоборот, для неустойчивой среды $\text{Im } k_{n\theta}(\omega)$ является характеристикой пространственного усиления волны с заданной частотой.

Для описания распространения электромагнитных волн в среде вместо вектора \mathbf{k} часто вводят вектор \mathbf{n} , связанный с \mathbf{k} соотношением

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (2.26)$$

Величина вектора \mathbf{n} называется комплексным показателем преломления. Дисперсионное уравнение (2.13) для \mathbf{n} записывается в виде

$$\left| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \left(\omega, \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right) \right| = 0. \quad (2.27)$$

Из этого уравнения можно определить проекцию вектора \mathbf{n} в заданном направлении

$$n(\omega, \theta) = \mu(\omega, \theta) + i\kappa(\omega, \theta), \quad (2.28)$$

где μ — собственно показатель преломления, а κ — коэффициент поглощения волны.

В общем случае комплексного $\mathbf{k}(\omega)$ волна вида (2.25), т. е. $E \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, может быть названа «плоской» лишь условно, так как плоскости постоянной фазы (плоскости,

перпендикулярные вектору $\text{Re } \mathbf{k}(\omega)$) в этом случае, вообще говоря, не совпадают с плоскостями постоянной амплитуды (плоскости, перпендикулярные вектору $\text{Im } \mathbf{k}(\omega)$). Поэтому такие волны называют неоднородными плоскими волнами в отличие от однородных плоских волн, для которых упомянутые плоскости совпадают.

Если волна слабо затухает, т. е. $|\text{Im } \mathbf{k}(\omega)| \ll \ll |\text{Re } \mathbf{k}(\omega)|$ (например, в случае слабопоглощающей прозрачной среды), то с большой степенью точности можно сказать, что фазовая и групповая скорости волны совпадают с получающимися при отсутствии поглощения (или затухания)*). Для непоглощающей прозрачной среды фазовая скорость волны

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} = \frac{n}{n} \frac{c}{n} \quad (2.29)$$

характеризует скорость распространения уровня постоянной фазы ($-\omega t + \mathbf{k} \mathbf{r} = \text{const}$) волны, в силу чего и называется фазовой скоростью. Величина же

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega \quad (2.30)$$

характеризует скорость перемещения амплитуды (а следовательно, энергии) волны и называется ее групповой скоростью (подробнее см., например, [1, 8]).

Выше мы убедились, что для нормальных волн, распространяющихся в среде, величины ω и \mathbf{k} не являются независимыми, а связаны между собой дисперсионным соотношением (2.13). Поэтому часто задают такой вопрос: каким же образом тензор $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно рассматривать как функцию независимых переменных ω и \mathbf{k} ? Ответ на этот вопрос, очевидно, состоит в том, что нормальные волны, или собственные колебания среды, соответствуют решениям уравнений поля (1.6) в отсутствие внешних источников, когда $\mathbf{j}_0 = 0$ и $\rho_0 = 0$. При произвольных же \mathbf{j}_0 и ρ_0 переменные ω и \mathbf{k} уже не связаны дисперсионным соотношением и функция $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ описывает линейный «отклик» среды на электромагнитное поле вида $E = E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \mathbf{r}}$ с независимыми значениями ω и \mathbf{k} .

В заключение этого параграфа кратко остановимся на вопросе о затухании (или нарастании) волн в слабо-

*) Непоглощающая среда может, конечно, быть непрозрачной в некоторой области частот, если $n^2(\omega) < 0$ (волна в такой среде затухнет). Именно это и имеет место при полном внутреннем отражении (см., например, [1]).

поглощающих (или усиливающих) средах и связи начальной задачи с граничной для таких сред. Этот вопрос имеет важное значение для всего дальнейшего и еще неоднократно будет обсуждаться ниже.

В слабопоглощающих средах антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости, ответственная за поглощение волн (см. формулу (2.7)), мала по сравнению с эрмитовской частью. Это приводит к тому, что в дисперсионном уравнении (2.13) мнимые слагаемые малы по сравнению с вещественными, т. е. $\text{Im Det}(\omega, k) \ll \ll \text{Re Det}(\omega, k)$. Тогда, если нас интересует поведение поля волны во времени (начальная задача), то приближенное решение уравнения (2.13) можно записать в виде *)

$$\omega \rightarrow \omega + i\gamma, \quad (2.31)$$

где $\omega(k)$ — вещественные корни уравнения

$$\text{Re Det}(\omega, k) = 0, \quad (2.32)$$

характеризующие спектр частот колебаний, а

$$\gamma(k) = - \frac{\text{Im Det}(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re Det}(\omega, k)} \quad (2.33)$$

— декремент затухания (или инкремент нарастания) колебаний. Если $\gamma(k) > 0$, то среда отдает энергию волне — происходит раскачка колебаний. Если же $\gamma(k) < 0$, то происходит диссипация энергии волны — энергия среды при этом увеличивается. Из (2.33) видно, что знак $\gamma(k)$ существенным образом зависит от относительного знака величин $\text{Im Det}(\omega, k)$ и $\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re Det}(\omega, k)$.

Для анализа пространственного затухания волны в заданном направлении решаем дисперсионное уравнение (2.13) относительно $k_0(\omega)$:

$$k_0(\omega) = \text{Re } k_0(\omega) + i \text{Im } k_0(\omega), \quad (2.34)$$

где $\text{Re } k_0(\omega)$ — вещественные корни уравнения (2.32), а величина

$$\text{Im } k_0(\omega) = - \frac{\text{Im Det}(\omega, k)}{\frac{\partial}{\partial k_0} \text{Re Det}(\omega, k)} \quad (2.35)$$

*) Чтобы не вводить лишних обозначений, мы комплексную и вещественную частоты обозначаем одной и той же буквой ω . В тех случаях, когда появляются отдельно $\text{Re } \omega$ и $\text{Im } \omega$, они обозначаются соответственно через ω и γ . Ниже всюду это записывается также в условном виде $\omega \rightleftharpoons \omega + i\gamma$.

характеризует затухание (или нарастание) волны в пространстве.

Из формул (2.33) и (2.35) легко установить следующую связь между временным и пространственным затуханиями волны:

$$\text{Im } k_0 = \frac{\gamma(\theta)}{v_{\text{гр}}(\theta)}, \quad \gamma = v_{\text{гр}} \text{Im } k_0 = \frac{\omega \kappa}{\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \mu(\omega)]}, \quad (2.36)$$

где $v_{\text{гр}}(\theta) = \frac{\partial \omega}{\partial k_0}$ — групповая скорость волны в заданном направлении.

Особо наглядны формулы (2.32) — (2.35) для продольной волны в изотропной среде, когда $\text{Det}(\omega, k) = \varepsilon^l(\omega, k)$ (см. уравнение (2.15)). Для равновесной изотропной среды $\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) > 0$ и волны всегда затухают как в пространстве, так и во времени, т. е. $\gamma < 0$ и $\text{Im } k_0 > 0$. Изменение знака $\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k)$ может привести к изменению знаков γ и $\text{Im } k_0$, т. е. к раскачке волны или, что то же самое, к неустойчивости среды.

Таким образом, мы опять приходим к выводу, что условие $\text{Im } \varepsilon^l(\omega, k) < 0$ есть признак неустойчивости среды.

§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ

После изложения общих основ линейной электродинамики материальных сред перейдем к исследованию свойств самой плазмы. Конкретная цель такого исследования — вывод материальных уравнений (1.14) для плазмы и тем самым в первую очередь получение выражения тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$. В настоящем параграфе, однако, мы, за одним исключением, не будем выводить материальных уравнений, а обсудим лишь различные модели, используемые для описания плазмы, и вопрос об области их применимости.

а) Движение отдельных частиц. При наиболее простом описании плазмы используется представление о свободном движении отдельных заряженных частиц во внешних полях. Уравнения движения частицы с массой m и

зарядом e записываются в виде *)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} + \mathbf{g}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{g} — ускорение, вызываемое силой неэлектромагнитного происхождения (например, гравитационной силой, или силой трения). Интегрирование системы (3.1) в случае произвольно неоднородных в пространстве и переменных во времени полей \mathbf{E} и \mathbf{B} представляет весьма трудную математическую задачу. В особенности трудность связана с неоднородностью полей в пространстве. Общие методы приближенного интегрирования системы (3.1) в случае сильных магнитных и слабых электрических полей (и слабого поля \mathbf{g}), медленно меняющихся в пространстве и во времени, были разработаны Х. Альвеном [15] (см. также обзор Д. В. Сивухина в сборнике [7]). В литературе такое приближение получило название дрейфового приближения. Мы здесь рассмотрим простейшие примеры применения дрейфовой теории.

§ Предположим, что поля \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{g} не меняются в пространстве и во времени, причем \mathbf{E} и \mathbf{g} перпендикулярны магнитному полю **). При этом уравнения (3.1) допускают стационарное решение для скорости частицы:

$$\mathbf{v} = \frac{c}{B^2} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{m}{c} \mathbf{g} \right) \mathbf{B} \right]. \quad (3.2)$$

Отсюда видим, что под действием полей \mathbf{E} и \mathbf{g} , перпендикулярных магнитному полю \mathbf{B} , частицы дрейфуют поперек поля, причем скорость электрического дрейфа $v_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ не зависит от массы частицы и знака ее заряда. Это означает, что электроны и ионы под действием такого электрического поля будут дрейфовать в одну и ту же сторону и с одинаковыми скоростями. Напротив, под действием поля \mathbf{g} (если это поле не зависит от знака заряда частицы, как это имеет место для поля тяжести) электроны и ионы дрейфуют в разные стороны, что приводит к появлению тока в плазме. Как мы увидим ниже, такой ток может стать причиной неустойчивости плазмы.

*) Ниже мы всюду ограничиваемся рассмотрением только нерелятивистской плазмы.

**) Магнитную индукцию \mathbf{B} мы также будем называть магнитным полем. Надеемся, что это не вызовет недоразумений, так как поле \mathbf{H} мы вообще не вводим в рассмотрение.

В ионосфере наличие поля g может быть обусловлено кривизной силовых линий магнитного поля Земли. В результате свободного движения частиц вдоль силовых линий поля с отличной от нуля кривизной возникает центробежная сила, которой эквивалентно поле $g = v_T^2/R$, где v_T — тепловая скорость частиц, а R — кривизна силовых линий магнитного поля Земли (по порядку величины равная радиусу Земли). Другой и при этом более важной причиной появления поля g в ионосферной плазме может служить отличный от нуля радиальный градиент давления, который приводит к появлению радиальной силы, а следовательно, эквивалентен силе $g = v_T^2/L_0$, где L_0 — характерный размер неоднородности плазмы. Эти вопросы более подробно будут обсуждены ниже при рассмотрении устойчивости неоднородной плазмы.

Относительный дрейф заряженных частиц в плазме может возникнуть также под действием постоянного продольного (параллельного магнитному полю) электрического поля E . Если при этом $g = 0$, то согласно уравнениям (3.1) продольная скорость частицы будет неограниченно возрастать со временем:

$$v = \frac{e}{m} Et. \quad (3.3)$$

Если же заряженная частица при своем движении в плазме испытывает силу трения $g = -\nu v$ (в результате столкновений с частицами другого сорта, например с нейтральными частицами), то дрейфовая скорость (3.3) в стационарном режиме равна

$$v = \frac{eE}{m\nu}. \quad (3.4)$$

С помощью уравнений (3.1), записанных для электронов и ионов, можно вычислить также ток, индуцированный в плазме под действием высокочастотного электромагнитного поля, и найти тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Слабость электромагнитных полей и медленное изменение их в пространстве (это предполагается) позволяют легко проинтегрировать систему (3.1). Действительно, если искать решение в виде $e^{-i\omega t + ikr}$ и принять, что $\omega \gg kv$, то зависимостью высокочастотных полей E и B от координат можно пренебречь и записать решение

линеаризованной системы (3.1) в виде

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v} - i\omega}{\omega_B^2 + (\mathbf{v} - i\omega)^2} \times \left\{ \mathbf{E} + \frac{\omega_B}{\mathbf{v} - i\omega} \left[\frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]}{B_0} + \frac{\omega_B}{\mathbf{v} - i\omega} \frac{\mathbf{B}_0(\mathbf{E}\mathbf{B}_0)}{B_0^2} \right] \right\}, \quad (3.5)$$

где \mathbf{B}_0 — внешнее постоянное магнитное поле, \mathbf{E} — электрическое поле волны (постоянное электрическое поле в плазме считается отсутствующим), а $\omega_B = \frac{eB_0}{mc}$. При получении выражения (3.5) мы также приняли, что $\mathbf{g} = -\mathbf{v}\mathbf{v}$, т. е. приближенно учли силу трения, испытываемую заряженными частицами данного сорта со стороны нейтральных частиц. Плотность тока, индуцированного в плазме при движении заряженных частиц, равна

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha=e,i} e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad (3.6)$$

где N_{α} — плотность заряженных частиц одного сорта (электронов или ионов), а суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. Подставляя (3.5) и (3.6) и используя (1.15) и (1.17), можно найти проводимость и диэлектрическую проницаемость плазмы. В результате получим

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{N\alpha}^2 (\omega + i\nu_{\alpha})}{\omega [(\omega + i\nu_{\alpha}) - \omega_{B\alpha}^2]} \times \left\{ \delta_{ij} + \frac{i\omega_{B\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha}} \left[e_{ijk} \frac{B_{0k}}{B_0} + \frac{i\omega_{B\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha}} \frac{B_{0i}B_{0j}}{B_0^2} \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Здесь e_{ijk} — единичный, полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\omega_{N\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$ — ленгмюровская, а $\omega_{B\alpha} = \frac{e_{\alpha} B_0}{m_{\alpha} c}$ — ларморовская частоты частиц сорта α .

Если ось z направить вдоль постоянного магнитного поля \mathbf{B}_0 , то тензор (3.7) можно записать в компонентах

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 (\omega + i\nu_{\alpha})}{\omega [(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - \omega_{B\alpha}^2]}, \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega [(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - \omega_{B\alpha}^2]^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega (\omega + i\nu_{\alpha})}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Ниже при обсуждении кинетической модели плазмы будут строго выяснены условия применимости простых формул (3.7) — (3.9) и всего приближения «отдельных частиц». Здесь же отметим, что при получении этих формул из системы (3.1) мы пренебрегли пространственным изменением волновых полей \mathbf{E} и \mathbf{B} в области локализации заряженной частицы, что соответствует пренебрежению пространственной дисперсией тензора диэлектрической проницаемости.

Разъясним смысл этого замечания.

Дело в том, что заряженные частицы плазмы, наряду с упорядоченным движением под действием волнового поля, совершают также и тепловое движение. Слабость электромагнитного поля означает, что скорость упорядоченного движения мала по сравнению с тепловой скоростью частицы. Поэтому за время изменения поля порядка $1/\omega$ частицу можно считать локализованной в области с размером порядка $\nu_{T\alpha}/\omega$. Это, по существу, локализация частицы в направлении поля \mathbf{B}_0 . В направлении поперек магнитного поля частица локализована благодаря лармовскому вращению вокруг поля с радиусом порядка $\nu_{T\alpha}/\omega_{B\alpha}$. Для пренебрежения неоднородностью волнового поля необходимо, чтобы обе указанные длины, характеризующие локализацию частицы, были значительно меньше длины волны электромагнитного поля, т. е.

$$\frac{k_z \nu_{T\alpha}}{\omega} \ll 1, \quad \frac{k_{\perp} \nu_{T\alpha}}{\omega_{B\alpha}} \ll 1. \quad (3.10)$$

В отсутствие внешнего магнитного поля оба эти условия принимают вид $\omega \gg k\nu_{T\alpha}$.

Таким образом, формулы (3.7) — (3.9) применимы лишь для волн, фазовые скорости которых значительно больше тепловых скоростей заряженных частиц, а длины

воли значительно больше ларморовских радиусов. Из таблиц I—III видно, что для ионосферной плазмы условия (3.10) выполняются в области волн длиннее дециметров и для частот, превышающих 10^5 гц; для лабораторной же плазмы эти условия могут соблюдаться в сантиметровой и даже миллиметровой области длин волн при частотах выше $10^8 - 10^9$ гц.

Еще одно ограничение на область применимости формул (3.7) — (3.9) связано с введением частоты ν_α , представляющей собой частоту столкновений заряженных частиц данного сорта с нейтральными. Приближение отдельных частиц по своему определению не учитывает корреляции внутри газа заряженных частиц одного сорта, т. е. не учитывает столкновения заряженных частиц одного сорта между собой. Столкновения же с нейтральными частицами учитываются введением внешней силы трения $\mathbf{g} = -\nu_\alpha \mathbf{v}$. Поэтому такое приближение, строго говоря, пригодно лишь в условиях, когда, помимо (3.10), выполнены также неравенства *) $\nu_{en} \gg \nu_{ei}$, ν_{ee} и $\nu_{in} \gg \nu_{ie}$, ν_{ii} , (неравенства должны выполняться для каждой из величин).

б) Гидродинамическая модель. Противоположной по сравнению с приближением отдельных частиц является гидродинамическая модель плазмы. В этой модели предполагается, что корреляции как между заряженными частицами, так и между заряженными и нейтральными частицами настолько сильны, что плазма ведет себя как проводящая жидкость. Система уравнений электродинамики и гидродинамики проводящей жидкости (в литературе эту систему называют уравнениями магнитной гидродинамики) записывается в виде (см., например, [1, 8])

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}] - \text{rot} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot} \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \text{div} \rho_M \mathbf{v} = 0, \quad (3.11)$$

$$\rho_M \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \text{rot} \mathbf{B}] + \rho_M \mathbf{g} + \\ + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad} \text{div} \mathbf{v}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0,$$

*) Заметим, что с помощью силы трения $-\nu_\alpha \mathbf{v}$ приближенно можно учесть также и столкновения заряженных частиц разного сорта. Это справедливо, например, для электронной плазмы, когда достаточно учитывать лишь трение электронов об ионы (подробнее относительно ν_α см. [1]).

где ρ_M — плотность жидкости, σ — ее проводимость, а η и ξ — два коэффициента вязкости; сила $\rho_M \mathbf{g}$ представляет собою внешнюю силу неэлектромагнитного характера, действующую на жидкость. Система (3.11) должна быть дополнена уравнением состояния для плазмы и уравнением переноса тепла

$$p = p(\rho_M, T),$$

$$\rho_M T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) S \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \frac{c^2}{4\pi^2 \sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2,$$

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \xi \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.12)$$

Здесь S — энтропия единицы массы жидкости, κ — ее теплопроводность, а σ_{ij} — тензор вязких напряжений.

Система уравнений магнитной гидродинамики (3.11) и (3.12) в применении к плазме обладает рядом недостатков. Во-первых, фигурирующие в ней коэффициенты σ , ξ , η и κ (так называемые коэффициенты переноса) введены чисто феноменологически. Для их определения приходится обращаться к микроскопической картине движения частиц жидкости и, в частности, решать кинетические уравнения (см., например, [16]). Во-вторых, эта система уравнений является слишком макроскопической в том смысле, что она совершенно не раскрывает картину движения отдельных компонент плазмы — электронов, ионов и нейтральных частиц *). Часто поэтому для описания плазмы используют систему уравнений двух- и трехжидкостной гидродинамики **). Эти приближения удобнее обсудить несколько позже, после введения кинетического уравнения с самосогласованным полем и интеграла столкновений заряженных частиц. Наконец, важно подчеркнуть, что для описания реальной плазмы система

*) Эти замечания не относятся, конечно, к проводящей жидкости (например, ртути), когда какое-либо микроскопическое описание практически невозможно.

***) Во избежание путаницы остановимся на терминологии. Гидродинамическими в собственном смысле этого понятия называют обычно уравнения, в которых жидкость характеризуется одним полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, а также плотностью $\rho_M(\mathbf{r}, t)$ (см., например, уравнения (3.11), относящиеся к случаю магнитной гидродинамики). Квазигидродинамические уравнения представляют собой уравнения, в которых фигурируют поля скоростей и плотностей для каждого сорта частиц. По последней причине часто говорят о двух- и трехжидкостной гидродинамике. Чтобы не усложнять изложение ниже мы не будем делать терминологического различия между гидродинамическим и квазигидродинамическим приближениями.

(3.11), вообще говоря, неприменима. Неприменима она, в частности, и для описания распространения электромагнитных волн в ионосферной плазме. Дело в том, что система уравнений (3.11) справедлива без дополнительных ограничений лишь в условиях, когда длины свободного пробега меньше всех характерных длин, а частоты столкновений больше характерных частот, т. е.

$$\omega \ll \nu_\alpha, \quad \omega_{B\alpha} \ll \nu_\alpha, \quad (3.13)$$

где $\alpha = e, i$. С другой стороны, следует отметить, что результаты магнитной гидродинамики во многих случаях оказываются справедливыми и в условиях, когда неравенства (3.13) заведомо не выполнены. В каждом конкретном случае легко понять причины этого. Ниже будет отмечаться, какие результаты более точной кинетической теории можно получить в рамках магнитной гидродинамики.

в) Кинетическое уравнение с самосогласованным полем. Наиболее общее описание плазмы — газа заряженных частиц — достигается с помощью кинетического уравнения. Метод кинетического уравнения использует вероятностное описание системы взаимодействующих частиц (как это делается, например, в статистической физике, см. [17]). При этом вначале вводится функция $f(t, \dots, r_s, \dots, p_s, \dots)$, которая характеризует распределение координат (r_s) и импульсов (p_s) всех частиц плазмы. Такая функция распределения зависит от очень большого числа переменных. При этом, однако, появляется возможность статистического описания плазмы. Дело в том, что газовая плазма как ионосферная, так и лабораторная в реальных условиях представляет собой систему слабо взаимодействующих частиц и для ее описания применимо так называемое «газовое» приближение. Действительно, в газовой плазме средняя энергия кулоновского взаимодействия частиц $e^2/r_{\text{ср}} \sim e^2 N^{1/3}$ мала по сравнению с их кинетической энергией *) T , т. е.

$$e^2 N^{1/3} \ll T. \quad (3.14)$$

*) Температуру частиц мы выражаем в энергетических единицах, полагая $T = kT_0$, где T_0 — температура в градусах Кельвина, а $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана. Заметим здесь же, что условие (3.14) нарушается в плотной низкотемпературной плазме, а также в плазме твердых тел (металлов и полупроводников), в которых, кроме того, при наличии фермиевского вырождения роль температуры T играет нулевая энергия $\sim \hbar^2 N^{2/3}/m$ (подробнее см. [2]).

При выполнении этого неравенства можно говорить, как и в случае газа, о почти независимом движении отдельных частиц. Поэтому в нулевом приближении по параметру малости $e^2 N^{1/3} / T$ функцию распределения N частиц можно представить в виде произведения

$$f(t, \dots r_s \dots p_s \dots) = \prod_s f(t, r_s, p_s),$$

где $f(t, r_s, p_s)$ определяет вероятность того, что частица s с импульсом p_s в момент времени t находится в точке r_s . Из условия сохранения плотности вероятности следует уравнение Лиувилля*)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (3.15)$$

(индекс s мы опустили). Здесь $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ — скорость частицы (заметим, что для нерелятивистской плазмы $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$), а величина $d\mathbf{p}/dt$ для заряженных частиц равна силе Лоренца (1.2).

В результате уравнение (3.15) для функции распределения принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (3.16)$$

Такое уравнение должно быть записано для каждого сорта частиц α , составляющих плазму. Плотность тока и плотность заряда определяются при помощи функции распределения формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{p}, \\ \rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. Формулы (3.17) подразумевают нормировку функций распределения на плотность (концентрацию) частиц:

$$\int f_{\alpha} d\mathbf{p} = N_{\alpha}. \quad (3.18)$$

*) Подробнее о принципе сохранения фазового объема см. [18].

Кинетическое уравнение (3.16) совместно с выражениями (3.17) и уравнениями поля (1.1) образуют уже полную систему уравнений, описывающих согласованное движение частиц плазмы с возникающими при этом движении электромагнитными полями. В связи с этим уравнение (3.16) называется кинетическим уравнением с самосогласованным полем в бесстолкновительном пределе. Плодотворность использования такого уравнения для описания электромагнитных свойств плазмы впервые была выяснена А. А. Власовым [19] и Л. Д. Ландау [20].

Приведенный здесь вывод кинетического уравнения с самосогласованным полем, строго говоря, не является последовательным. С последовательным выводом этого уравнения читатель может познакомиться в монографиях [14, 21, 22], где можно найти также и вывод уравнения следующего приближения по параметру (3.14), которое учитывает ближние корреляции, или столкновения, частиц. Учет корреляций движения частиц приводит к появлению отличной от нуля правой части в уравнении (3.16), т. е. к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \\ = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В следующем параграфе мы более подробно остановимся на анализе правой части этого уравнения, которую обычно называют интегралом столкновений. Здесь же отметим, что $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} \sim \nu_{\alpha\beta} f_\alpha$, где $\nu_{\alpha\beta}$ — частота столкновений частиц сорта α с частицами сорта β . Поэтому уравнение нулевого приближения — кинетическое уравнение с самосогласованным полем (3.16) — пригодно для описания процессов, протекающих за времена, меньшие чем время свободного пробега частиц (время между двумя столкновениями), или, что то же самое, для описания волн с частотой

$$\omega \gg \nu_\alpha \sim \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}. \quad (3.20)$$

Для таких процессов плазму, вообще говоря, можно считать бесстолкновительной. Учет столкновений частиц при этом приводит к малым поправкам.

Одним из результатов более детального вывода уравнения (3.16) или (3.19) является установление того факта, что в газовой плазме так называемое действующее поле $E_{\text{эфф}}$ равно рассматриваемому среднему статистическому полю E . Действительно, в (3.16) и (3.19) фигурирует именно поле E , между тем, если бы на частицу действовало другое поле $E_{\text{эфф}} \neq E$, как это имеет место в конденсированной среде, то в (3.16) и (3.19) появилось бы поле $E_{\text{эфф}}$. Доказать равенство $E_{\text{эфф}} = E$ в плазме можно и иным путем (см. [1] и указанную там литературу).

г) **Квазигидродинамическое приближение для бесстолкновительной плазмы.** Покажем теперь, что даже при полном отсутствии столкновений частиц, когда выполнено неравенство (3.20), т. е. явно нарушены неравенства (3.13), в определенных условиях применимо гидродинамическое, или, как часто говорят, квазигидродинамическое, описание плазмы. Будем исходить из кинетического уравнения с самосогласованным полем (3.16). Получение квазигидродинамических уравнений сводится к отысканию замкнутой системы уравнений для моментов функции распределения для каждого сорта частиц:

$$N_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int f_{\alpha} d\mathbf{p}, \quad N_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{p}. \quad (3.21)$$

Эти моменты представляют собой соответственно плотность числа частиц и плотность потока частиц. Квазигидродинамические уравнения в условиях, когда их удастся получить в замкнутом виде, обладают рядом преимуществ по сравнению с кинетическим уравнением. Гидродинамика значительно проще кинетики. Достаточно отметить, что гидродинамические величины $N_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ зависят лишь от двух переменных \mathbf{r} и t , в то время как функция распределения $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ является функцией трех переменных \mathbf{r} , \mathbf{p} и t .

Путем интегрирования кинетического уравнения (3.16) легко получить гидродинамические уравнения для электронов и ионов (т. е. для $\alpha = e, i$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \text{div} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} \Pi_{\alpha ij} &= \frac{e_{\alpha} N_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{\alpha} \mathbf{B}] \right\}_i, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $\Pi_{\alpha ij} = \int v_i v_j f_{\alpha} d\rho$. Первое из этих уравнений представляет собой уравнение непрерывности, второе — уравнение движения. Оно, однако, не является «гидродинамически замкнутым», так как содержит тензор $\Pi_{\alpha ij}$, который еще не определен через гидродинамические величины (3.21). Определение тензора $\Pi_{\alpha ij}$ в общем случае является трудной задачей. В бесстолкновительной плазме известны, однако, два случая, когда тензор $\Pi_{\alpha ij}$ можно явно вычислить и тем самым придать гидродинамическим уравнениям замкнутый вид.

1) «Холодная» плазма. Если нас интересуют процессы, в которых характерная скорость значительно больше тепловых скоростей частиц (электронов и ионов, $\alpha = e, i$ *), т. е.

$$\frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \gg v_{T\alpha} \quad (3.23)$$

($v_{T\alpha} = \sqrt{T_{\alpha}/m_{\alpha}}$ — тепловая скорость частиц сорта α , $L \sim \sim k^{-1}$ — характерный размер, а $\tau \sim 1/\omega$ — характерное время процесса), то тепловым движением частиц можно пренебречь, считая плазму «холодной». Это означает, что функция распределения частиц по скоростям может быть представлена в виде

$$f_{\alpha} \sim \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_{\alpha}). \quad (3.24)$$

Тогда $\Pi_{\alpha ij} = N_{\alpha} V_{\alpha i} V_{\alpha j}$ и уравнения движения (3.22) легко могут быть сведены к виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{\alpha} \nabla) \mathbf{V}_{\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{\alpha} \mathbf{B}] \right\}. \quad (3.25)$$

Уравнения движения (3.25) совместно с уравнениями непрерывности (3.22) для электронов и ионов и уравнениями поля (1.1) образуют замкнутую систему уравнений для «холодной» бесстолкновительной плазмы. Плотность тока и заряда при этом, согласно (3.21) и (3.17), определяется выражениями

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}, \quad \rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha}, \quad (3.26)$$

где суммирование ведется по электронам и ионам плазмы. Такую квазигидродинамику называют двухжидкостной гидродинамикой «холодной» плазмы без столкновений.

*) Например, в случае волновых процессов фазовая скорость волны должна значительно превосходить тепловые скорости частиц.

Линеаризуя гидродинамические уравнения (3.22) и (3.25) и сводя их к алгебраическим (считая все возмущенные величины зависящими от времени и координат в виде $e^{-i\omega t + ikr}$), можно получить проводимость и тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Для плазмы в отсутствие сильного электрического поля и направленных потоков легко показать, что уравнения двухжидкостной гидродинамики приводят к тензору диэлектрической проницаемости, совпадающему с (3.7)—(3.9) при $v_\alpha = 0$, что соответствует условию (3.20). Строго говоря, для справедливости такого тензора диэлектрической проницаемости, а следовательно, и уравнений двухжидкостной гидродинамики бесстолкновительной «холодной» плазмы при наличии магнитного поля, кроме условий (3.20) и (3.23), необходимо потребовать выполнение неравенств

$$|\omega \pm \omega_{B\alpha}| \gg k_z v_{T\alpha}, v_\alpha; \quad \omega_{B\alpha} \gg k_\perp v_{T\alpha}, \quad (3.27)$$

где k_z — проекция волнового вектора k вдоль магнитного поля, а k_\perp — поперек поля.

2) *Неизотермическая «горячая» плазма с $T_e \gg T_i$.* Вторая область значений параметров, когда также применимо гидродинамическое описание бесстолкновительной плазмы, — это

$$v_{Ti} \ll \frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}. \quad (3.28)$$

Как было показано Ю. Л. Климонтовичем и В. П. Силиным (см. [2]), в этих условиях бесстолкновительную плазму можно описывать уравнениями одножидкостной гидродинамики. Приведем соответствующий вывод.

Из неравенств (3.28) следует, что ионы можно считать холодными и описывать их уравнением непрерывности (3.22) и уравнением движения (3.25). Эти уравнения, по существу, характеризуют движение массы плазмы. Чтобы получить уравнения одножидкостной гидродинамики, из них нужно исключить электрическое поле. Воспользуемся для этого кинетическим уравнением (3.16) для электронов. Учитывая, что согласно (3.28) производным по времени в этом уравнении можно пренебречь, для определенности запишем его решение в виде распределения Больцмана в электрическом поле с потенциалом Φ (т. е. $E = -\nabla\Phi$):

$$f_e = A \exp \left[\frac{m}{2T_e} (v - U_e)^2 + \frac{e\Phi}{T_e} \right], \quad (3.29)$$

где A — постоянная нормировки, а \mathbf{U}_e — направленная скорость электронов, определяющая электронный ток в плазме

$$\mathbf{j}_e = eN_e\mathbf{U}_e. \quad (3.30)$$

Подставляя выражение (3.29) в уравнение движения для электронов (3.22) и учитывая, что $|\mathbf{U}_e| \ll v_{te}$, находим

$$\mathbf{E} = -\frac{T_e}{eN_e} \nabla N_e - \frac{1}{c} [\mathbf{U}_e \mathbf{B}]. \quad (3.31)$$

Теперь уже можно исключить электрическое поле из уравнения движения для ионов. Принимая при этом во внимание условие квазинейтральности плазмы и учитывая, что полный ток в плазме $\mathbf{j} = eN_e\mathbf{U}_e + e_iN_i\mathbf{U}_i$, окончательно получаем

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + (\mathbf{U}_i \nabla) \mathbf{U}_i = -\frac{v_s^2}{N_i} \nabla N_i + \frac{1}{MN_i c} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \quad (3.32)$$

где $v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M}}$ — скорость ионного звука в плазме, которая по сути вывода уравнения (3.32) считается постоянной величиной, а $Z = \left| \frac{e_i}{e} \right|$.

Упростим также и уравнения поля (1.1). Во-первых, пренебрежем токами смещения (что справедливо при $\omega \sim 1/\tau \ll \omega_{Ni}$), а во-вторых, исключим электрическое поле из них. Именно, исключим электрическое поле \mathbf{E} из уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.33)$$

воспользовавшись для этого соотношением

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c} [\mathbf{U}_i \mathbf{B}], \quad (3.34)$$

которое следует непосредственно из уравнения Эйлера для ионов (3.25) при условии $\omega \sim 1/\tau \ll \omega_{vi}$. Подставляя (3.34) в (3.33), получаем искомое уравнение

$$\text{rot} [\mathbf{U}_i \mathbf{B}] = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.35)$$

Собирая теперь все полученные выше уравнения вместе, опуская индекс i и вводя массовую плотность жидкости $\rho_M = MN_i$, запишем систему уравнений

гидродинамики бесстолкновительной плазмы в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{U} \mathbf{B}], \\ \rho_M \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} \right] &= -v_s^2 \nabla \rho_M - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}], \quad (3.36) \\ \frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_M \mathbf{U} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.11) для идеально проводящей жидкости при условии пренебрежения всеми диссипативными процессами. Уравнение состояния плазмы при этом имеет вид

$$p = v_s^2 \rho_M = Z N_i T_e = N_e T_e, \quad (3.37)$$

причем T_e , как отмечалось выше, считается постоянной величиной. Согласно этому уравнению давление плазмы определяется температурой электронов, что возможно лишь в случае неизотермической плазмы, в которой $T_e \gg T_i$. Требование неизотермичности плазмы происходит также из следующих соображений. Из гидродинамики известно, что характерной скоростью течения жидкости является скорость звука порядка $\sqrt{p/\rho_M}$ (см., например, [8, 23]). Согласно (3.37) эта скорость равна $v_s \sim \sqrt{T_e/M}$ (именно поэтому v_s называют скоростью звука в бесстолкновительной плазме). С другой стороны, из (3.28) следует, что эта скорость должна быть значительно больше тепловой скорости ионов, т. е. $v_s \gg v_{Ti}$, что, очевидно, возможно лишь в неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$.

В заключение приведем еще раз все условия, при которых справедливо описание бесстолкновительной плазмы с помощью уравнений одножидкостной гидродинамики (3.36):

$$\begin{aligned} v_{Ti} &\ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}, \\ \omega &\ll \omega_{Bi} \ll \omega_{Ni}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Строго говоря, при наличии сильного магнитного поля первое из этих условий должно выполняться только для проекции волнового вектора вдоль магнитного поля, т. е. для k_z (это будет показано в § 8). Условие $\omega_{Bi} \ll \omega_{Ni}$ требуется для выполнения условия квазинейтральности плазмы при $\omega \ll \omega_{Bi}$. Это, однако, не означает, что в

уравнениях (3.36) нельзя переходить к случаю изотропной плазмы (когда магнитное поле $\mathbf{B} = 0$). В отсутствие магнитного поля уравнение непрерывности для ионов и уравнение (3.32) образуют полную систему и в упрощении уравнения (3.33) (для чего использовалось условие $\omega \ll \omega_{Bi}$) нет необходимости. Условие квазинейтральности плазмы при этом выполняется, если $\omega \ll \omega_{Ni}$.

Наконец, заметим, что хотя при получении системы (3.36) мы полностью пренебрегли столкновениями частиц, это вовсе не означает, что она справедлива только при выполнении условия (3.20) как для ионов, так и для электронов. При анализе кинетического уравнения для ионов (см. случай «холодной» плазмы) мы действительно могли пренебречь столкновениями лишь при $\omega \gg \nu_i$, где ν_i — полная частота столкновений ионов, т. е. со всеми частицами. В кинетическом же уравнении для электронов столкновениями можно также пренебречь, если $\nu_e \ll k\nu_{Te}$, где ν_e — полная частота столкновений электронов. При этом ω может быть как больше, так и меньше ν_e . Таким образом, система (3.36) остается справедливой и при наличии столкновений частиц в плазме, если только $\omega \gg \nu_i$, а $|\omega + i\nu_e| \ll k\nu_{Te}$.

Совпадение системы (3.36) с уравнениями гидродинамики идеальной жидкости (3.11) как раз и подтверждает высказанное выше замечание о том, что и гидродинамическое описание плазмы в некоторых случаях оказывается справедливым в значительно более широкой области, чем это следует из условий (3.13).

§ 4. СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим теперь вопрос о столкновениях заряженных частиц в плазме, т. е. учтем ближние корреляции в движении частиц. В последние годы в литературе появилось большое число работ, посвященных этому вопросу (подробную библиографию можно найти в монографиях [14, 22, 24]). Это связано с существенным прогрессом в области изучения столкновений заряженных частиц в плазме. Именно, удалось получить интеграл столкновений заряженных частиц, который учитывает не только кулоновское рассеяние, но также и рассеяние при излучении и поглощении электромагнитных волн частицами плазмы. Такое рассеяние может играть существенную

роль лишь в случае неравновесной плазмы (например, в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$). Однако поскольку этот эффект в книгах по теории плазмы, за исключением [14] и [24], до сих пор, по существу, не рассматривался, мы остановимся на нем довольно подробно.

Для получения интеграла столкновений в плазме, строго говоря, следует исходить из уравнения Лиувилля для функции распределения N частиц, последовательно учитывая в ней корреляции частиц (метод Боголюбова [21] или родственные ему методы [14, 22, 24]). Мы поступим иначе. Будем исходить из наиболее общего выражения для интеграла столкновений частиц, предложенного Больцманом (см., например, [16, 17]), и упростим его для случая плазмы. Именно таким путем впервые и был получен Ландау интеграл столкновений для случая чисто кулоновского взаимодействия частиц [25]. Этот же способ, хотя и не очень строгий, но простой и наглядный, использован в обзоре [26] при получении интеграла столкновений с учетом поляризации плазмы.

а) **Интеграл столкновений в полностью ионизованной плазме.** Рассмотрение начнем со случая полностью ионизованной плазмы. В условиях, когда применимо газовое приближение, т. е. выполнено неравенство (3.14), парные столкновения частиц преобладают над тройными, четверными и т. д. В подобных условиях можно сказать, что функция распределения данной одной частицы меняется в результате столкновений с какой-либо другой частицей. Пусть \mathbf{p} , \mathbf{p}' и \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}'_1 — соответственно импульсы сталкивающихся частиц α и β до и после столкновений, а $W(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$ — вероятность рассеяния $\mathbf{p} + \mathbf{p}' \rightleftharpoons \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1$. Тогда изменение функции распределения частиц сорта α в результате столкновений с частицами сорта β можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}'_1 W(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) \times \\ \times [f_\alpha(\mathbf{p}) f_\beta(\mathbf{p}') - f_\alpha(\mathbf{p}_1) f_\beta(\mathbf{p}'_1)]. \quad (4.1)$$

Это выражение называется интегралом упругих столкновений Больцмана (общий интеграл Больцмана учитывает также и неупругие столкновения частиц).

Основная задача теории интегралов столкновений состоит в вычислении вероятности рассеяния $W(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$. Мы будем вычислять эту вероятность квантовомеханическим способом, так как он обладает большей наглядно-

стью, чем классический (см. любой курс квантовой механики, например, [27]). Предположим, что энергия взаимодействия двух частиц есть функция только лишь мгновенного расстояния между ними, и запишем ее в виде

$$U(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) = \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)}, \quad (4.2)$$

$$U(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Здесь $U(\mathbf{k})$ — фурье-образ потенциала взаимодействия. Согласно квантовой механике волновая функция свободной частицы с импульсом \mathbf{p} и энергией $E = p^2/2m$ имеет вид плоской волны

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A e^{-i \frac{Et}{\hbar} + i \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}}, \quad (4.3)$$

где $A = (2\pi\hbar)^{-3/2}$ — постоянная нормировки. Под действием возмущения $U(\mathbf{r})$ частицы совершают переходы между различными состояниями (4.3), т. е. претерпевают рассеяние. Вероятность рассеяния при взаимодействии частиц α и β по закону (4.2) определяется выражением

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1}|^2, \quad (4.4)$$

где

$$U_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1} = \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) \langle \mathbf{p}_1 | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p}'_1 | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\beta} | \mathbf{p}' \rangle. \quad (4.5)$$

Здесь, очевидно, используется борновское приближение в теории столкновений. При вычислении матричных элементов по волновым функциям (4.3), стоящих под интегралом выражения (4.5), следует учитывать, что частицы в нулевом приближении по взаимодействию свободно движутся, и поэтому в момент времени t (для которого мы и проводим весь расчет) $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{\alpha 0} + \mathbf{v}_\alpha t$ и т. д. В результате, например, для матричного элемента $\langle \mathbf{p}_1 | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} | \mathbf{p} \rangle$ получим

$$\langle \mathbf{p}_1 | e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\alpha} | \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_\alpha} - \frac{p^2}{2m_\alpha} - \hbar k v_\alpha\right). \quad (4.6)$$

Аналогично вычисляется и второй матричный элемент. Легко видеть, что соотношение (4.6) учитывает законы сохранения энергии и импульса при излучении частицей

с импульсом \mathbf{p} «кванта взаимодействия» $\hbar\mathbf{k}$ с энергией $\hbar\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha$ и переходе в состояние с импульсом \mathbf{p}_1 . Этот квант поглощается второй частицей (частица β) и переводит ее из состояния с импульсом \mathbf{p}' в состояние с импульсом \mathbf{p}'_1 .

Подставляя выражения (4.4) — (4.6) в формулу (4.1), окончательно получим

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} \int d\mathbf{p}' d\mathbf{k} |U(\mathbf{k})|^2 \delta\left[\frac{(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\alpha} + \frac{(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k})^2}{2m_\beta} - \frac{p^2}{2m_\alpha} - \frac{p'^2}{2m_\beta}\right] \{f_\alpha(\mathbf{p})f_\beta(\mathbf{p}') - f_\alpha(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})f_\beta(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k})\}. \quad (4.7)$$

Легко видеть, что в этом выражении явно учитываются законы сохранения энергии и импульса.

Выражение (4.7) в рамках применимости борновского приближения является общим, так как получено без каких-либо ограничений на закон взаимодействия частиц (кроме предположения о центральном характере взаимодействия). Упростим теперь это выражение путем перехода к пределу $\hbar\mathbf{k} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}'$, т. е. в предположении о малости передаваемого при взаимодействии импульса. Разлагая подинтегральное выражение (4.7) по степеням $\hbar\mathbf{k}$ и учитывая, что $U(\mathbf{k})$ зависит лишь от величины вектора \mathbf{k} , после несложных вычислений получим

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \times \times \left[\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j} f_\beta(\mathbf{p}') - f_\alpha(\mathbf{p}) \frac{\partial f_\beta(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} \right], \quad (4.8)$$

где

$$I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \pi \int d\mathbf{k} |U(\mathbf{k})|^2 k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta). \quad (4.9)$$

Используя выражения (4.8) и (4.9), кинетическое уравнение (3.19) для функции распределения частиц α можно записать в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = = \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_j} - A_{ij} f_\alpha \right), \quad (4.10)$$

где

$$D_{ij} = \sum_{\beta} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_{\beta}(\mathbf{p}'),$$

$$A_i = \sum_{\beta} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial f_{\beta}(\mathbf{p}')}{\partial p'_j}$$
(4.11)

— соответственно коэффициенты диффузии и трения в пространстве скоростей. Суммирование в этих выражениях ведется по всем сортам частиц, с которыми частицы α могут сталкиваться; уравнения (4.10) по своему типу представляют собой уравнения Фоккера — Планка.

Полученный выше интеграл столкновений (4.8) и кинетическое уравнение (4.10) пригодны при оговоренных условиях для любого газа, поскольку в них не конкретизирован закон взаимодействия частиц $U(\mathbf{k})$ (или $U(\mathbf{r})$).

Перейдем теперь к полностью ионизованной плазме. Чтобы найти энергию взаимодействия двух частиц в плазме, вычислим потенциал, создаваемый заряженной частицей α , движущейся равномерно со скоростью \mathbf{v}_{α} , когда $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha}t$. Из уравнений поля (1.6) при этом имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\alpha}t). \quad (4.12)$$

Переходя к фурье-представлению и используя материальное уравнение (1.15) для потенциала поля, создаваемого рассматриваемой частицей, получим выражение ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e_{\alpha}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k})}, \quad (4.13)$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k})$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы. В случае вакуума, когда $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$, выражение (4.13), как это и должно быть, совпадает с потенциалом кулоновского поля.

Очевидно, что энергия взаимодействия частицы α с частицей β равна

$$U(\mathbf{r}) = e_{\beta} \Phi(\mathbf{r}). \quad (4.14)$$

Следовательно, искомая величина

$$U(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e_{\alpha} e_{\beta}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{k})}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в формулу (4.9), для случая полностью ионизованной плазмы получаем

$$I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \pi \frac{(4\pi e_{\alpha} e_{\beta})^2}{(2\pi)^6} \int dk \frac{k_i k_j \delta(kv_{\alpha} - kv_{\beta})}{|k_i k_j \varepsilon_{ij}(kv_{\alpha}, k)|^2}. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16), учитывающее поляризацию плазмы, математически более строго, исходя из метода Боголюбова и родственных ему методов, было получено в работах А. Ленарда [28], Р. Балеску [29] и В. П. Силина [30] (подробную библиографию можно найти в [13, 21, 24, 26]). Если в формуле (4.16) положить $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$ и устранить расходимость, обрезая интегрирование на нижнем ($k > k_{\min}$) и верхнем ($k < k_{\max}$) пределах, получим формулу Ландау [25]

$$I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 2\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 L \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3}, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}$ — относительная скорость сталкивающихся частиц, а $L = \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}}$ — так называемый кулоновский логарифм. Такое обрезание соответствует предположению, что взаимодействие между частицами плазмы является чисто кулоновским при $r_{\min} < r < r_{\max}$, но «обрезается» на расстояниях $r < r_{\min} \sim 1/k_{\max}$ и $r > r_{\max} \sim 1/k_{\min}$. Величину r_{\min} следует определять из условия применимости использованного выше борновского приближения*), т. е. $\frac{e^2}{r_{\min}} = \frac{3}{2} T$; за величину r_{\max} Ландау

выбрал дебаевский радиус в плазме $r_{\max} = r_D = \left(\sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \right)^{-1/2} \approx \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 N}}$ при $T_{\alpha} = T$. Такой выбор

r_{\max} обоснован тем, что в плазме кулоновское поле заряженной частицы экранируется на расстояниях, превышающих дебаевский радиус (подробнее см. [1]). Поскольку параметры обрезания r_{\min} и r_{\max} входят под логарифм, то неточность в их определении при вычислении величины L сравнительно малосущественна.

*) Строгое обоснование такого обрезания взаимодействия на малых расстояниях в классическом случае дано в работах [31].

В квантовом пределе, когда $\frac{e^2}{\hbar v} \ll 1$ следует считать, что r_{\min} порядка дебройлевской длины волны, т. е. полагать $r_{\min} \sim \lambda_B = \frac{\hbar}{mv}$ (см. [1,14]).

Для термодинамически равновесной плазмы интеграл в формуле (4.16) благодаря учету эффекта поляризации обрезается автоматически на $k_{\min} \sim 1/r_D$. Тем самым обосновывается метод обрезания взаимодействия на больших расстояниях, использованный Ландау. Ионосферную плазму можно считать близкой к равновесной. Что касается лабораторной плазмы, то она, как правило, далека от термодинамического равновесия. Тем не менее в дальнейшем в конкретных вычислениях мы будем пользоваться интегралом столкновений Ландау *). При этом для численных оценок примем

$$L = \ln \left\{ \frac{3}{2} \frac{T}{e^2} \left(\frac{T}{8\pi e^2 N} \right)^{1/2} \right\} \approx \frac{3}{2} \ln \left(220 \frac{T}{N^{1/3}} \right). \quad (4.18)$$

Для ионосферной и лабораторной плазмы (см. таблицы I—IV) $L \approx 10 \div 12$.

б) Квазигидродинамическое приближение для полностью ионизованной плазмы. Теперь когда мы знаем кинетическое уравнение для полностью ионизованной плазмы с учетом кулоновских столкновений, можно перейти к квазигидродинамическому описанию плазмы при учете столкновений частиц. В случае столкновительной плазмы, наряду с гидродинамическими величинами (3.21), необходимо также определить температуру для каждого сорта частиц:

$$T_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha d\mathbf{p}}{3N_\alpha(\mathbf{r}, t)}. \quad (4.19)$$

В случае бесстолкновительной плазмы температура частиц считалась постоянной как во времени, так и в пространстве (см. § 3).

Уравнения для гидродинамических величин, называемые квазигидродинамическими уравнениями, а часто также уравнениями переноса, получаются из кинетического уравнения путем умножения на единицу, $m_\alpha \mathbf{v}$, $m_\alpha v^2/2$ и интегрирования по импульсу. Поскольку интеграл столкновений Ландау, в котором учтены лишь упругие столкновения, сохраняет число частиц неизменным, уравнение непрерывности (3.22), т. е. уравнение для

*) Если плазма далека от термодинамического равновесия, то интеграл столкновений Ландау, не учитывающий эффект поляризации плазмы, может приводить к качественно неправильным результатам. О роли эффекта поляризации в столкновениях заряженных частиц в плазме см. [24].

нулевого момента, не меняется:

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0. \quad (4.20)$$

Уравнение для первого момента записывается в виде (ср. с (3.22))

$$m_\alpha N_\alpha \left[\frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) V_{\alpha i} \right] = - \frac{\partial P_\alpha}{\partial r_i} - \frac{\partial \Pi_{\alpha ij}}{\partial r_j} + \\ + e_\alpha N_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right\}_i + R_{\alpha i}, \quad (4.21)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Pi_{\alpha ij} = m_\alpha \int d\mathbf{p} f_\alpha \left\{ (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)_i (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2 \right\}, \\ \mathbf{R}_\alpha = m_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}. \quad (4.22)$$

Тензор $\Pi_{\alpha ij}$ называют тензором вязких напряжений для частиц данного сорта, а вектор \mathbf{R}_α , характеризующий изменение импульса частиц сорта α в результате столкновений со всеми остальными частицами, — силой трения.

Уравнение для второго момента, или уравнение для баланса энергии, можно записать в виде

$$\frac{3}{2} N_\alpha \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla T_\alpha \right) + P_\alpha \operatorname{div} \mathbf{V}_\alpha + \Pi_{\alpha ij} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_j} = \\ = Q_\alpha - \operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha, \quad (4.23)$$

где

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha, \\ Q_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int d\mathbf{p} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2 \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}. \quad (4.24)$$

Вектор \mathbf{q}_α представляет плотность потока тепла, переносимого частицами сорта α , а величина Q_α характеризует выделение тепла частицами данного сорта в результате столкновений со всеми остальными частицами.

Для полностью ионизованной плазмы *)

$$\mathbf{R}_e = - \mathbf{R}_i \\ Q_e + Q_i = - (\mathbf{R}_e \mathbf{V}_e) - (\mathbf{R}_i \mathbf{V}_i) = - \mathbf{R}_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i). \quad (4.25)$$

*) Мы всюду для простоты ограничиваемся случаем простой плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта.

Эти соотношения выражают законы сохранения импульса и энергии при кулоновских столкновениях.

Для того чтобы уравнения гидродинамики (уравнения переноса) стали замкнутыми, необходимо установить связь величин $\Pi_{\alpha ij}$, q_α , R_α и Q_α с гидродинамическими величинами N_α , V_α и T_α . Эту связь можно найти путем приближенного решения кинетического уравнения, выражая функцию распределения через N_α , V_α и T_α и используя затем формулы (4.22) и (4.24). Такое приближенное решение кинетического уравнения в принципе возможно лишь в условиях достаточно медленного изменения функции распределения в пространстве и во времени. Существование такого локального решения обусловлено процессами релаксации, связанными со столкновениями частиц, благодаря которым функция распределения всегда стремится к максвелловской функции.

Максвелловское распределение является точным решением кинетического уравнения в условиях, когда пространственные и временные производные равны нулю. Если же они не равны нулю, но достаточно малы, то и решение кинетического уравнения должно быть близко к локальному максвелловскому распределению $f_{0\alpha}$ для каждого сорта частиц, т. е.

$$f_\alpha = f_{0\alpha} + f_{1\alpha} = \frac{N_\alpha(\mathbf{r}, t)}{(2\pi m_\alpha T_\alpha(\mathbf{r}, t))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t))^2}{2T_\alpha(\mathbf{r}, t)}\right\} + f_{1\alpha}, \quad (4.26)$$

где $f_{1\alpha} \ll f_{0\alpha}$. Поправка $f_{1\alpha}$ зависит от тех факторов, которые нарушают однородное и стационарное максвелловское распределение. Очевидно, функция $f_{1\alpha}$ пропорциональна пространственным и временным градиентам. Линейными функциями этих градиентов оказываются и величины $\Pi_{\alpha ij}$, q_α , R_α и Q_α , определение которых составляет основную задачу теории явлений переноса в плазме.

Развиты различные приближенные методы определения указанных величин. Наиболее известными из них являются метод Чепмена — Энскога, изложенный в монографии [16], и метод Греда, развитый в работах [32]. Мы здесь не будем подробно останавливаться на этих приближенных методах решения кинетического уравнения. Все они основаны на разложении функции распределения в ряд по специальным функциям и определении коэффициен-

тов разложения. Приведем лишь результаты вычислений искомых величин $\Pi_{\alpha ij}$, q_{α} , R_{α} и Q_{α} для «простой» плазмы (плазмы с ионами одного сорта), заимствованные из статьи С. И. Брагинского в сборнике [7], т. 1*). При этом ограничимся рассмотрением двух противоположных предельных случаев: сильно замагниченной плазмы, когда $\omega_{B\alpha} \gg v_{\alpha}$, и незамагниченной плазмы, когда $\omega_{B\alpha} \ll v_{\alpha}$.

Полная сила трения R_{α} состоит из силы трения относительного движения $R_{U\alpha}$ и термосилы R_{Te} :

$$R_{\alpha} = R_{U\alpha} + R_{Te}. \quad (4.27)$$

Причем в случае сильнозамагниченной плазмы, когда $\omega_{B\alpha} \gg v_{\alpha}$, имеем

$$R_{Ue} = -mv_e N_e (0,51U_{\parallel} + U_{\perp}) = -eN_e \left(\frac{j_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right), \quad (4.28)$$

$$R_{Te} = -0,71 N_e \nabla_{\parallel} T_e + \frac{3}{2} \frac{N_e v_e}{\omega_{Be}} [h \nabla T_e].$$

Здесь $U = V_e - V_i$ — относительная скорость, $j = eNU$ — полный ток в плазме при $Z = \left| \frac{e_i}{e} \right| = 1$, $h = \frac{B}{B}$, а

$$\sigma_{\perp} = \frac{e^2 N_e}{mv_e}, \quad \sigma_{\parallel} = 1,96\sigma_{\perp} \quad (4.29)$$

— коэффициенты электропроводности плазмы. Сила трения для ионов согласно (4.25) равна

$$R_i = -R_e.$$

Электронный поток тепла также удобно записать в виде суммы двух слагаемых

$$q_e = q_{Ue} + q_{Te}, \quad (4.30)$$

где q_{Ue} и q_{Te} в случае сильно замагниченной плазмы,

*) В отличие от обозначений, используемых в этой статье, в выражении для ларморовской частоты сохраняем знак заряда частицы,

т. е. $\omega_{B\alpha} = \frac{e_{\alpha} B}{m_{\alpha} c}$.

$\omega_{Be} \gg v_e$, определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{Ue} &= 0,71 N_e T_e \mathbf{U}_{\parallel} - \frac{3}{2} \frac{N_e T_e v_e}{\omega_{Be}} [\mathbf{hU}], \\ \mathbf{q}_{Te} &= -\kappa_{e\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp} T_e + \frac{5}{2} \frac{N_e T_e}{m\omega_{Be}} [\mathbf{h}\nabla T_e], \end{aligned} \quad (4.31)$$

где коэффициенты электронной теплопроводности

$$\kappa_{e\parallel} = 3,16 \frac{N_e T_e}{m v_e}, \quad \kappa_{e\perp} = 4,66 \frac{N_e T_e v_e}{m\omega_{Be}^2}. \quad (4.32)$$

Поток тепла, переносимый ионами,

$$\mathbf{q}_i = -\kappa_{i\parallel} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{i\perp} \nabla_{\perp} T_i - \frac{5}{2} \frac{N_i T_i}{M\omega_{Bi}} [\mathbf{h}\nabla T_i], \quad (4.33)$$

где

$$\kappa_{i\parallel} = 3,9 \frac{N_i T_i}{M v_i}, \quad \kappa_{i\perp} = 2 \frac{N_i T_i v_i}{M\omega_{Bi}^2}. \quad (4.34)$$

Тепло, передаваемое ионам при столкновениях с электронами,

$$Q_i = 3 \frac{m}{M} v_e (T_e - T_i) N_e, \quad (4.35)$$

а тепло, переходящее к электронам,

$$Q_e = -Q_i - (R_e U). \quad (4.36)$$

Наконец, тензор вязких напряжений $\Pi_{\alpha ij}$ в случае сильнозамагниченной плазмы выражается через тензор сдвига

$$W_{\alpha ij} = \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_j} + \frac{\partial V_{\alpha j}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} V_{\alpha} \quad (4.37)$$

(для каждого сорта частиц, т. е. $\alpha = e, i$) с помощью пяти коэффициентов вязкости $\eta_{\mu\alpha}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$):

$$\Pi_{\alpha ij} = -\eta_{0\alpha} W_{\alpha ij}^{(0)} - \eta_{1\alpha} W_{\alpha ij}^{(1)} - \eta_{2\alpha} W_{\alpha ij}^{(2)} + \eta_{3\alpha} W_{\alpha ij}^{(3)} + \eta_{4\alpha} W_{\alpha ij}^{(4)}, \quad (4.38)$$

где

$$\eta_{0e} = 0,73 \frac{N_e T_e}{v_e}, \quad \eta_{1e} = 0,51 \frac{N_e T_e v_e}{\omega_{Be}^2}, \quad (4.39)$$

$$\eta_{2e} = 4\eta_{1e}, \quad \eta_{3e} = \frac{1}{2} \frac{N_e T_e}{\omega_{Be}}, \quad \eta_{4e} = 2\eta_{3e};$$

$$\eta_{0i} = 0,96 \frac{N_i T_i}{v_i}, \quad \eta_{1i} = 0,3 \frac{N_i T_i v_i}{\omega_{Bi}^2}, \quad (4.40)$$

$$\eta_{2i} = 4\eta_{1i}, \quad \eta_{3i} = \frac{1}{2} \frac{N_i T_i}{\omega_{Bi}}, \quad \eta_{4i} = 2\eta_{3i};$$

$$W_{\alpha ij}^{(0)} = \frac{3}{2} \left(h_i h_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \left(h_\mu h_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right) W_{\alpha\mu\nu},$$

$$W_{\alpha ij}^{(1)} = \left(\delta_{i\mu}^\perp \delta_{j\nu}^\perp + \frac{1}{2} \delta_{ij}^\perp h_\mu h_\nu \right) W_{\alpha\mu\nu},$$

$$W_{\alpha ij}^{(2)} = \left(\delta_{i\mu}^\perp h_j h_\nu + \delta_{j\nu}^\perp h_i h_\mu \right) W_{\alpha\mu\nu}, \quad (4.41)$$

$$W_{\alpha ij}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\delta_{i\mu}^\perp e_{j\nu\gamma} + \delta_{j\nu}^\perp e_{i\gamma\mu} \right) W_{\alpha\mu\nu},$$

$$W_{\alpha ij}^{(4)} = \left(h_i h_\mu e_{j\nu\gamma} + h_j h_\nu e_{i\gamma\mu} \right) W_{\alpha\mu\nu}.$$

Здесь $\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - h_i h_j$, а $e_{ij\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Выше использованы следующие обозначения:

$$U_{\parallel} = \mathbf{h} (U\mathbf{h}), \quad U_{\perp} = [\mathbf{h} [U\mathbf{h}]],$$

$$v_e = v_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m} \frac{e^4 Z^2 L N_i}{T_e^{3/2}}}, \quad (4.42)$$

$$v_i = v_{ii} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{M} \frac{e^4 Z^4 L N_i}{T_i^{3/2}}}.$$

Как уже неоднократно отмечалось выше, формулы (4.27) — (4.42) относятся к случаю однозарядных ионов ($Z = 1$) и сильного магнитного поля, когда как для электронов, так и для ионов выполняется неравенство $\omega_{B\alpha} \gg v_\alpha$. Для ионосферной плазмы на высотах, где ее можно считать полностью ионизованной (высоты выше 200 км), эти неравенства выполняются с большим запасом. Как правило, эти неравенства хорошо выполняются также и в высокотемпературной плазме в установках для управляемого термоядерного синтеза. В низкотемператур-

ной же плазме газового разряда обычно магнитные поля достаточно слабы и имеют место обратные неравенства $v_\alpha \gg \omega_{B\alpha}$, т. е. плазма незамагничена. Для незамагниченной простой плазмы ($Z = 1$) выражения для силы трения относительного движения R_{Ue} и термосилы R_{Te} имеют вид (ср. с (4.28))

$$R_{Ue} = -0,51 m v_e N_e U + 0,21 m \omega_{Be} N_e [U h], \quad (4.43)$$

$$R_{Te} = -0,71 N_e \nabla T_e + 0,81 \frac{N_e \omega_{Be}}{v_e} [h \nabla T_e].$$

Электронные потоки тепла при этом даются формулами (ср. с (4.31))

$$q_{Ue} = 0,71 N_e T_e U + 0,81 N_e T_e \frac{\omega_{Be}}{v_e} [U h], \quad (4.44)$$

$$q_{Te} = -\chi_e \nabla T_e + 1,8 \chi_e \frac{\omega_{Be}}{v_e} [h \nabla T_e],$$

где $\chi_e = \chi_{\parallel e} = 3,16 N_e T_e / m v_e$ — коэффициент электронной теплопроводности незамагниченной плазмы. Поток же тепла ионов равен

$$q_i = -\chi_i \nabla T_i - 1,8 \chi_i \frac{\omega_{Bi}}{v_i} [h \nabla T_i], \quad (4.45)$$

где $\chi_i = \chi_{\parallel i} = 3,9 \frac{N_i T_i}{M v_i}$ — коэффициент ионной теплопроводности. Наконец, тензор вязких напряжений $\Pi_{\alpha ij}$ в случае незамагниченной плазмы, так же как и для замагниченной, выражается через тензор сдвига $W_{\alpha ij}$ с помощью соотношения (4.38), в котором отличными от нуля являются только по два коэффициента вязкости электронов и ионов

$$\eta_{0e} = \eta_{2e} = 0,73 \frac{N_e T_e}{v_e}, \quad \eta_{0i} = \eta_{2i} = 0,96 \frac{N_i T_i}{v_i}, \quad (4.46)$$

а тензоры $W_{\alpha ij}^{(\mu)}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) определены формулами (4.41).

В заключение заметим, что выражения для коэффициентов переноса при произвольных значениях $\omega_{B\alpha}$ и v_α можно найти в упомянутой выше статье С. И. Брагинского в сборнике [7], т. 1. Там же приведена таблица пересчета этих коэффициентов для случая «непростой» плазмы с $Z \neq 1$.

Соотношения (4.20) — (4.46) совместно с уравнениями Максвелла (1.6) образуют полную систему уравнений двухжидкостной гидродинамики полностью ионизованной простой плазмы. Как уже отмечалось выше, такое описание применимо в условиях, когда пространственные и временные производные всех гидродинамических величин достаточно малы, а именно для каждого сорта частиц ($\alpha = e, i$)

$$\omega, k v_{T\alpha}, k V_{\alpha} \ll v_{\alpha}. \quad (4.47)$$

При наличии магнитного поля необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \omega, k_z v_{T\alpha}, \quad k_z V_{\alpha} &\ll v_{\alpha}, \\ k_{\perp} v_{T\alpha}, \quad k_{\perp} V_{\alpha} &\ll \omega_{B\alpha}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

в) Столкновения частиц в слабоионизованной плазме.

Перейдем теперь к случаю слабоионизованной плазмы, т. е. такой плазмы, в которой определяющую роль играют столкновения заряженных частиц с нейтральными. Для ионосферной плазмы это имеет место на высотах до 200 км; в лабораторных же условиях такая плазма встречается в газовом разряде низкого давления.

В слабоионизованной плазме столкновения частиц, помимо упругого рассеяния, могут приводить к целому ряду неупругих процессов таких, как возбуждения нейтральных атомов, ионизация, перезарядка и др. (об элементарных процессах в слабоионизованной плазме см. монографии Б. М. Смирнова [33] и С. Брауна [34]). Между тем приведенный выше интеграл столкновений Больцмана (4.1) описывает лишь упругие столкновения частиц. Для неупругих процессов интеграл столкновений (точнее, выражение для вероятности рассеяния в нем) имеет гораздо более сложный вид. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением лишь упругих столкновений частиц. В ионосферной плазме именно они играют определяющую роль при исследовании распространения слабых электромагнитных волн, т. е. в линейном приближении.

В случае слабоионизованной плазмы даже для чисто упругих столкновений не всегда удается получить вполне удовлетворительное простое выражение для интеграла столкновений Больцмана. Вместе с тем при практических вычислениях часто используются приближенные (модельные) представления столкновительного члена в кинетических уравнениях. На одном из таких модельных ин-

тегралов столкновений *), получивших в последние годы широкое признание, мы здесь кратко остановимся (это интеграл столкновений Батнагара — Гросса — Крука, или, сокращенно, интеграл БГК [35]).

При конструировании модельного интеграла упругих столкновений исходят из общих законов сохранения числа частиц, импульса и энергии. Эти законы при столкновениях частиц α с частицами β записываются в виде

$$\int d\mathbf{p} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = 0,$$

$$m_\alpha \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} + m_\beta \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial t} \right)_{st}^{\beta\alpha} = 0, \quad (4.49)$$

$$m_\alpha \int d\mathbf{p} v^2 \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} + m_\beta \int d\mathbf{p} v^2 \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial t} \right)_{st}^{\beta\alpha} = 0.$$

Кроме того, интеграл столкновений частиц при подстановке в него максвелловских распределений для всех частиц должен обращаться в нуль. Это утверждение является следствием H -теоремы (см., например, [14, 16, 17]), согласно которой в отсутствие внешнего электрического поля при любых начальных условиях функции распределений частиц газа под действием столкновений стремятся к максвелловским распределениям. Процесс приближения функции распределения к максвелловской при столкновениях называют релаксацией. Релаксация функции распределения частиц одного сорта к максвелловской со своей температурой происходит за время порядка эффективного времени свободного пробега частицы (по сути дела, так и определяется эффективная частота столкновений). Требуемыми свойствами обладает модельный интеграл столкновений БГК, который записывается в виде

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = -\nu_{\alpha\beta} (f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha\beta}). \quad (4.50)$$

Здесь $\nu_{\alpha\beta}$ — некоторые постоянные величины, имеющие

*) Термин «модельный» указывает на то, что соответствующий интеграл столкновений не получается последовательным путем из точного интеграла в результате каких-то приближений. Вместо этого сразу конструируется выражение, удовлетворяющее ряду общих требований, ясных из дальнейшего.

смысл эффективных частот столкновений, а функция

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi m_{\alpha} T_{\alpha\beta})^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m_{\alpha} (v - V_{\beta})^2}{2T_{\alpha\beta}} \right\}, \quad (4.51)$$

где

$$V_{\alpha} = \frac{1}{N_{\alpha}} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_{\alpha}, \quad N_{\alpha} = \int d\mathbf{p} f_{\alpha},$$

$$T_{\alpha} = \frac{P_{\alpha}}{N_{\alpha}} = \frac{m_{\alpha}}{3} \frac{1}{N_{\alpha}} \int d\mathbf{p} (v - V_{\alpha})^2 f_{\alpha}, \quad (4.52)$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{m_{\alpha} T_{\beta} + m_{\beta} T_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}.$$

Определения температуры и направлений скорости частиц (4.52) совпадают с принятыми выше (см. формулы (3.21) и (4.19)). Подставляя выражение (4.50) в соотношения (4.49), можно показать, что законы сохранения энергии и импульса выполняются при условии $m_{\alpha} N_{\alpha} v_{\alpha\beta} = m_{\beta} N_{\beta} v_{\beta\alpha}$. В то же время в теории модельного интеграла столкновений БГК, по существу, нет никаких соотношений, определяющих сами частоты столкновений $\nu_{\alpha\beta}$; поэтому они должны быть определены из дополнительных соображений (например, из простых молекулярно-кинетических представлений [1]).

Следует также заметить, что кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений, как бы удачно ни был последний сконструирован, не может претендовать на точное количественное описание физических явлений в слабоионизованной плазме. Это замечание, естественно, относится и к интегралу БГК.

г) Квазигидродинамика слабоионизованной плазмы. Совершенно так же, как и для полностью ионизованной плазмы, с помощью кинетического уравнения с интегралом столкновений БГК мы можем построить квазигидродинамику для слабоионизованной плазмы, которая, очевидно, будет трехжидкостной ($\alpha = e, i, n$, где n — нейтральные частицы). Вычисление величин $\Pi_{\alpha ij}$, Q_{α} , R_{α} и Q_{α} для разных компонент плазмы при этом не представляет труда, так как кинетическое уравнение при слабом отклонении от локального максвелловского распределения (см. (4.26)) допускает точное решение. Окончательно полная система трехжидкостной гидродинамики

для слабоионизованной плазмы записывается в виде

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0,$$

$$m_\alpha N_\alpha \left[\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha \right]_i = e_\alpha N_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \mathbf{B}] \right)_i -$$

$$- \frac{\partial P_\alpha}{\partial r_i} - \frac{\partial \Pi_{\alpha ij}}{\partial r_j} - m_\alpha N_\alpha \sum_\beta v_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)_i, \quad (4.53)$$

$$\frac{3}{2} N_\alpha \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla T_\alpha \right) + P_\alpha \operatorname{div} \mathbf{V}_\alpha + \operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha + \Pi_{\alpha ij} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_j} =$$

$$= \frac{1}{2} m_\alpha N_\alpha \sum_\beta v_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)^2 - \frac{2}{3} \sum_\beta \frac{m_\alpha N_\alpha v_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} (T_\alpha - T_\beta), \quad (4.54)$$

где $\alpha = e, i, n$, причем $e_n = 0$. Тензор вязких напряжений $\Pi_{\alpha ij}$ и вектор потока тепла \mathbf{q}_α в этих уравнениях определяются выражениями

$$\Pi_{\alpha ij} = - \frac{P_\alpha}{\sum_\beta v_{\alpha\beta}} \left(\frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial r_j} + \frac{\partial V_{\alpha j}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{V}_\alpha \right) +$$

$$+ \frac{m_\alpha N_\alpha}{\sum_\beta v_{\alpha\beta}} \sum_\beta v_{\alpha\beta} \left\{ (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)_i (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta)^2 \right\}, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{q}_\alpha = - \frac{5}{2} \frac{P_\alpha}{m_\alpha \sum_\beta v_{\alpha\beta}} \frac{\partial T_\alpha}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{m_\alpha N_\alpha}{\sum_\beta v_{\alpha\beta}} \sum_\beta v_{\alpha\beta} \left\{ (\mathbf{V}_\beta - \mathbf{V}_\alpha)^2 (\mathbf{V}_\beta - \mathbf{V}_\alpha) + \right.$$

$$\left. + 5 (\mathbf{V}_\beta - \mathbf{V}_\alpha) \frac{T_\beta - T_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \right\}.$$

Уравнения (4.53) и (4.54), так же как и система уравнений двухжидкостной гидродинамики для полностью ионизованной плазмы, приведенная выше (см. (4.20)–(4.46)), применимы в условиях, когда выполняются неравенства (4.47) и (4.48) для каждого сорта частиц.

Заметим, что в монографии [1] в §§ 13 и 14 для описания динамики слабоионизованной плазмы используется

система уравнений непрерывности и уравнений движения без учета тензора вязких напряжений, т. е. уравнения (4.53) без членов, содержащих $\Pi_{\alpha ij}$. Такая система уравнений является замкнутой лишь при условии, когда температуру всех компонент плазмы можно считать постоянной. В противном случае необходимо учитывать также уравнения для баланса энергии, т. е. уравнения (4.54). Что же касается членов, содержащих тензор вязких напряжений $\Pi_{\alpha ij}$, то в условиях применимости гидродинамического описания они действительно малы, однако в ряде случаев именно они определяют поглощение (или усиление) низкочастотных волн в плазме и их также следует принимать во внимание (в особенности если речь идет о дрейфовых колебаниях неоднородной плазмы, см. §§ 11 и 13). Для рассмотренных в [1] задач эти члены несущественны.

В приведенной системе уравнений (4.53), (4.54) учтены столкновения заряженных частиц не только с нейтральными частицами, но также и между собой. Это сделано умышленно. Дело в том, что в последнее время модельный интеграл столкновений БГК и систему (4.53), (4.54) с успехом применяют также и к полностью ионизованной плазме. Полученные при этом результаты качественно хорошо согласуются с результатами, полученными с помощью точного интеграла столкновений Ландау (но естественно лишь в тех случаях, когда такие результаты могут быть получены). Мы, однако, модельный интеграл столкновений БГК будем использовать только в случае слабоионизованной плазмы, когда столкновениями заряженных частиц между собой можно пренебречь.

В заключение отметим, что при описании гидродинамических явлений в слабоионизованной плазме система (4.53), (4.54) приводит не только к качественно, но в ряде случаев и к количественно достаточно точным результатам. Для иллюстрации этого рассмотрим поведение плазмы во внешнем постоянном электрическом поле (для простоты в отсутствие магнитного поля). Под действием электрического поля в плазме возникает дрейф электронов (дрейф ионов пренебрежимо мал по сравнению с дрейфом электронов) и происходит их джоулевский нагрев. Заметим, что такая задача была исследована с помощью точного интеграла столкновений Больцмана в статье [36] (см. также [37]). Система (4.53), (4.54) для скорости дрейфа электронов относительно нейтральных частиц и для их

температуры приводит к следующим выражениям:

$$V_e = \frac{eE_0}{mv_{en}}, \quad (4.56)$$

$$T_e = T_n + \frac{2}{3} \frac{e^2 E_0^2}{m \delta v_{en}},$$

где $\delta = 2 \frac{m}{M}$ — коэффициент передачи энергии от электронов к нейтральным частицам при упругих столкновениях. Эти результаты находятся в качественном соответствии с результатами точной теории [36, 37], в которой вычисляются величины v_{en} и δ , причем в общем случае $\delta \neq 2m/M$.

д) **О границах применимости линейного приближения.** Обсужденные выше модели и уравнения, описывающие плазму, пригодны для исследования произвольных нелинейных движений плазмы. Это относится как к бесстолкновительной плазме, так и к плазме с учетом столкновений частиц. В дальнейшем, однако, мы ограничимся изучением лишь линейных движений плазмы, т. е. исследованием линеаризованных уравнений движения. Более того, как уже говорилось во введении, предметом изучения будут только колебания и волны в плазме. Естественно, при этом возникает вопрос о границах применимости линейного приближения.

Прежде всего отметим, что этот вопрос весьма нетривиален и на сегодняшний день полного ответа на него нет. Полный ответ на него можно получить лишь в рамках теории нелинейных движений плазмы; такая же теория пока еще недостаточно развита. Поэтому здесь мы обсудим вопрос о границах применимости линейного приближения лишь в общих чертах.

Если подходить к электродинамике плазмы с достаточно общей точки зрения, то нелинейность процессов в плазме можно считать правилом, а не исключением. В самом деле, полная система уравнений электродинамики плазмы, включающая в себя кинетическое уравнение (либо уравнения гидродинамики) и уравнения поля, является нелинейной. Линеаризация этих уравнений, вообще говоря, возможна, но область применимости соответствующих линеаризованных уравнений не всегда является широкой. Эта область зависит от вида функции распределения частиц в отсутствие электромагнитного поля (или, как говорят, от невозмущенной функции распределения), от

плотности и температуры плазмы, от частоты столкновений частиц и т. д. Существенно, однако, что одной из характерных особенностей плазмы является появление нелинейных эффектов в сравнительно небольших электромагнитных полях. Под действием электромагнитного поля волны меняются как макроскопические параметры плазмы, такие, как плотность, температура и направленная скорость частиц, так и микроскопические, например, функция распределения частиц в узкой области скоростей вблизи фазовой скорости волны, где взаимодействие частиц с электромагнитной волной носит резонансный характер. Границы применимости линейного приближения, по существу, определяются из условия малости этих изменений.

В случае термодинамически равновесной и пространственно однородной плазмы любые малые возмущения затухают со временем; такая плазма является устойчивой по отношению к малым возмущениям. Строго говоря, только для такой плазмы и имеет смысл определять границы применимости линейного приближения. Если же плазма неустойчива, а, как мы увидим ниже, это имеет место практически при сколь угодно малом отклонении состояния плазмы от термодинамически равновесного (малая анизотропия распределения скоростей, слабая неоднородность в пространстве и др.), то за очень короткое время даже бесконечно малые возмущения в ней сильно нарастут и линейное приближение перестанет быть справедливым. Это время, по порядку величины равное обратному инкременту нарастания малых возмущений, будет характеризовать время «развала» исходного неустойчивого состояния плазмы вследствие развития в ней нелинейных движений.

При определении границ применимости линейного приближения в устойчивой плазме различают два предельных случая: процессы, протекающие медленнее, чем время свободного пробега частиц (столкновительная плазма), и процессы, протекающие быстрее этого времени (бестолкновительная плазма).

В столкновительной плазме нелинейные эффекты при распространении волн в первую очередь связаны с ее разогревом, который облегчен в плазме вследствие медленности передачи энергии от электронов к тяжелым частицам (ионам и нейтральным частицам). Последнее обстоятельство в свою очередь обусловлено малостью коэффи-

циента $\delta = \frac{2m}{M}$ — средней относительной доли энергии, передаваемой электроном тяжелой частице при одном акте упругих столкновений, которые здесь только и рассматриваются (см. формулы (4.56) *)). Вместе с тем электроны в плазме могут получать от поля большую энергию и нагреваться. Согласно (4.56) такой нагрев будет незначительным, если

$$\frac{e^2 E_0^2}{m v_{en}^2} \frac{1}{T_e} = \frac{V_e^2}{v_{Te}^2} \ll \delta \ll 1. \quad (4.57)$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства можно пренебречь также и электрическим дрейфом электронов в поле волны. Условие (4.57) определяет область применимости линейного приближения в плазме со столкновениями. Оно применимо и в случае полностью ионизованной плазмы, если под v_{en} понимать частоту столкновений электронов с ионами (подробнее см. [1, 37]).

Значительно сложнее и многообразнее картина в случае бесстолкновительной плазмы, когда характерное время процесса меньше времени свободного пробега частиц. Нелинейные явления при распространении электромагнитной волны в такой плазме в основном связаны с изменением плотности частиц и с искажением функции распределения частиц в области скоростей, близких к фазовой скорости волны.

Первый из этих эффектов возникает под действием усредненной высокочастотной силы **) [38] $F = \frac{e^2}{4\pi m \omega^2} \nabla E_0^2$, действующей на частицы в электромагнитном поле и приводящей к перераспределению плотности электронов в плазме. Очевидно, что этот эффект будет незначительным, если потенциал этой силы мал по сравнению со средней тепловой энергией частиц, т. е. когда

$$\frac{e^2 E_0^2}{m \omega^2} \ll T_e \quad \text{или} \quad V_e^2 = \frac{e^2 E_0^2}{m^2 \omega^2} \ll v_{Te}^2. \quad (4.58)$$

*) Формулы (4.56) сохраняют силу и в случае переменного поля, если только $\omega \ll v_{en}$; при этом E_0 представляет собой амплитуду переменного поля.

**) Выражение для силы можно получить из уравнения движения частиц (см. § 3) путем усреднения по времени (подробнее см. обзор [39]).

Величина $V_e = eE_0/m\omega$ представляет собой скорость, приобретаемую электроном в высокочастотном поле за полпериода колебаний поля.

Что же касается искажения функции распределения частиц вследствие их резонансного взаимодействия с электромагнитной волной (это явление известно под названием квазилинейного эффекта), то в бесстолкновительной плазме оно всегда имеет место. Однако если плотность энергии электромагнитного поля волны в плазме мала по сравнению со средней кинетической энергией теплового движения частиц, т. е.

$$W \ll NT, \quad (4.59)$$

то это искажение происходит достаточно медленно, за время порядка

$$\tau \sim \left(\frac{eE_0}{m} k \right)^{-1/2}, \quad (4.60)$$

где k — волновое число колебаний поля. Поэтому всегда можно указать условия на амплитуду волны E_0 , заключающиеся в том, что за время развития линейного процесса (например, затухания волны в плазме) искажением функции распределения частиц можно пренебречь. Мы здесь не будем выписывать таких условий, а отошлем интересующегося читателя к статье А. А. Веденова в сборнике [7], т. 3. Заметим лишь, что учет столкновений частиц приводит к восстановлению равновесной функции распределения и при условии

$$v > \tau^{-1} \sim \sqrt{\frac{eE_0}{m} k} \quad (4.61)$$

сильного искажения функции распределения частиц в плазме не происходит.

Приведенные выше неравенства (4.57) — (4.59) и (4.61) определяют границы применимости линейного приближения при распространении электромагнитной волны в плазме в смысле малости нелинейных эффектов. Не следует, однако, думать, что при выполнении этих неравенств нелинейные эффекты вообще отсутствуют. Такие эффекты, хоть и малые, при распространении электромагнитной волны в плазме всегда имеют место, причем их вероятность растет с ростом амплитуды волны. Один из таких эффектов будет рассмотрен ниже в § 10.

§ 5. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ИЗОТРОПНОЙ И ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНИХ ПОЛЕЙ

Выше мы довольно подробно обсудили различные модели, используемые для описания газовой плазмы. Наиболее общей из них, естественно, является модель, основанная на кинетическом уравнении. Поэтому в дальнейшем мы в основном будем пользоваться кинетическим описанием плазмы и только в некоторых случаях будем исходить из квазигидродинамических уравнений.

Рассмотрение начнем с простейшего случая плазмы без столкновений и в отсутствие внешних полей. Плазму будем считать пространственно неограниченной, однородной и изотропной. В таком основном состоянии функции распределения частиц плазмы зависят лишь от абсолютной величины импульса. Примем, что это распределение (для каждого сорта частиц) имеет вид распределения Максвелла:

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}) = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}}, \quad (5.1)$$

которое, очевидно, удовлетворяет стационарному и однородному кинетическому уравнению (3.16) в отсутствие полей и нормировано в соответствии с (3.18).

Для того чтобы вычислить диэлектрическую проницаемость плазмы, рассмотрим малые отклонения функций распределения частиц от равновесных функций (5.1), т. е. примем, что $f_\alpha = f_{0\alpha} + \delta f_\alpha$. Отклонение δf_α вызвано возмущающими полями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Линеаризуя кинетическое уравнение (3.16) и считая δf_α , \mathbf{E} и \mathbf{B} величинами первого порядка малости, получим

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (5.2)$$

При написании этого уравнения предполагались отсутствующими «внешние поля» \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 . Заметим, однако, что это допущение не эквивалентно использованию максвелловского распределения (5.1) в качестве нулевого приближения. Достаточно сказать, что максвелловское распределение (5.1) удовлетворяет кинетическому уравнению нулевого приближения и при наличии в плазме постоянного и однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 (см. § 7).

Поскольку уравнения поля (1.6), так же как и уравнение (5.2), являются линейными, то в отсутствие внешних источников ρ_0 и \mathbf{j}_0 зависимость от времени и координат решений этих уравнений можно принять в виде $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Тогда решение уравнения (5.2) запишется так:

$$\delta f_\alpha = -i \frac{e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (5.3)$$

Теперь мы можем вычислить ток, индуцированный в плазме под действием возмущений \mathbf{E} и \mathbf{B} , и тем самым найти проводимость и диэлектрическую проницаемость плазмы. Действительно, согласно (3.17)

$$\mathbf{j}_i = -i \sum_\alpha e_\alpha^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i E_j \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \equiv \sigma_{ij} E_j = -i \frac{\omega}{4\pi} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) E_j, \quad (5.4)$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -i \sum_\alpha e_\alpha^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad (5.5)$$

где $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор комплексной проводимости плазмы. С помощью соотношения (1.11) или непосредственно из (5.4) находим диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (5.6)$$

В формулах (5.4) — (5.6) суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. В условиях, когда плазма является бесстолкновительной, нейтральные частицы плазмы в электромагнитных явлениях участия, очевидно, не принимают. Необходимо вместе с тем подчеркнуть, что условия применимости «бесстолкновительного приближения» можно указать лишь в результате решения задачи с учетом столкновений, что и будет сделано ниже.

Второй вопрос, на который следует обратить внимание, — это наличие полюса $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ в подынтегральных выражениях (5.4) — (5.6). Как его обходить? Ответ на этот вопрос можно сразу получить, если предположить,

например, что при $t = -\infty$ неравновесная добавка к функции распределения δf_α должна обращаться в нуль *). Это, с другой стороны, означает, что частота ω и при вещественном волновом векторе k должна иметь, хотя бы бесконечно малую, но положительную мнимую часть, что следует из принятой нами временной зависимости возмущенных величин в виде $e^{-i\omega t}$. Ниже мы увидим, и это вполне естественно, что малая положительная мнимая добавка к ω в формуле (5.3) автоматически возникает при учете столкновений частиц. В результате функции $\sigma_{ij}(\omega, k)$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, k)$ при вещественной частоте ω должны рассматриваться как пределы соответствующих функций комплексного переменного ω при подходе к действительной оси со стороны верхней полуплоскости. Таким образом, полюс $k v = \omega$ лежит не на контуре интегрирования, а несколько выше, или же, иными словами, в формулах

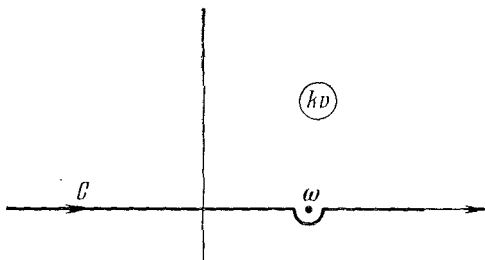


Рис. 1. Контур интегрирования C .

(5.4) — (5.6) интегрирование следует проводить не по действительной оси, а по контуру C , изображенному на рис. 1 (более подробно см. [2, 14]).

Ниже мы часто будем встречаться с такого типа интегралами и всюду интегрирование будем проводить по контуру C .

Учитывая сказанное выше и используя соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{x + i\delta} = \frac{\mathcal{P}}{x} - i\pi\delta(x),$$

*) При этом часто говорят об адиабатическом включении поля в бесконечно удаленном прошлом.

где символ \mathcal{P} означает, что при интегрировании особенность в точке $x = 0$ следует понимать в смысле главного значения, запишем тензор диэлектрической проницаемости плазмы (5.6) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \\ = \delta_{ij} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int d\mathbf{p} v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \left\{ \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отсюда видно, что вклад в мнимую часть тензора диэлектрической проницаемости, ответственную за поглощение электромагнитной энергии в бесстолкновительной плазме (см. § 2), дают лишь частицы, скорость которых удовлетворяет условию $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. Это условие можно переписать в виде $\omega/k = v_{\phi} = v \cos \vartheta$, где v_{ϕ} — фазовая скорость волны и ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} . Но соотношение $\cos \vartheta = v_{\phi}/v$ представляет собой не что иное, как условие черенковского излучения. При этом же условии, очевидно, происходит и обратный процесс — черенковское поглощение. Мы видим, таким образом, что в изотропной плазме без столкновений диссипация волн происходит вследствие их черенковского поглощения частицами плазмы. Такой результат вполне понятен: при отсутствии магнитного поля и соударений частицы плазмы движутся равномерно и прямолинейно. Излучение и поглощение электромагнитных волн частицей при таком движении и представляют собой черенковские излучение и поглощение.

При помощи выражения (5.6) легко показать, что в рассматриваемом нами случае изотропной плазмы тензор диэлектрической проницаемости имеет лишь две независимые компоненты (см. формулу (2.8)):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial E_{\alpha}}, \\ \varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial E_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $E_{\alpha} = p^2/2m_{\alpha}$ — энергия частицы сорта α . Интегрирование в этих выражениях, как и выше, проводится по контуру C . Для максвелловского распределения частиц

(5.1) выражения (5.8) сводятся к виду [2]

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right), \quad (5.9)$$

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right) \right],$$

где

$$J_+(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{i\infty}^x d\tau e^{\tau^2/2} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x W \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Функция $W(x)$ подробно изучена и протабулирована в [40].

Формулы (5.9) определяют поперечную и продольную диэлектрические проницаемости нерелятивистской максвелловской плазмы без столкновений во всей плоскости комплексного переменного ω при вещественном волновом векторе k *).

Впоследствии нам понадобятся следующие асимптотические представления функции $J_+(x)$:

$$J_+(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2}$$

при $|x| \gg 1$, $|\operatorname{Re} x| \gg |\operatorname{Im} x|$;

$$J_+(x) \approx -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \quad (5.10)$$

при $|x| \ll 1$;

$$J_+(x) = -i \sqrt{2\pi} x e^{-x^2/2}$$

при $|x| \gg 1$, $|\operatorname{Im} x| \gg |\operatorname{Re} x|$, $\operatorname{Im} x < 0$.

Учтем теперь столкновения частиц в плазме. К сожалению, решить кинетическое уравнение (4.10), которое даже после линеаризации остается интегральным, в общем случае не удастся. Поэтому не удастся получить и

*) Заметим, что выражения (5.9) можно также рассматривать как функции комплексного волнового вектора k при вещественной частоте ω . Действительно, все проведенные выше рассуждения относительно обхода полюса $\omega = kv$ и выбора контура интегрирования C сохраняют силу при вещественном значении ω , если предположить, что вектор k имеет малую отрицательную мнимую часть. Отрицательная мнимая добавка к вектору k при вещественной частоте ω автоматически возникает при учете столкновений частиц в плазме.

выражение для тензора диэлектрической проницаемости полностью ионизованной плазмы с учетом кулоновских столкновений в произвольной области частот и длин волн. Однако те области ω и \mathbf{k} , в которых можно получить выражение $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, достаточно широки для анализа спектров колебаний плазмы. В особенности это справедливо, если речь идет об ионосферной плазме в условиях, когда магнитным полем можно пренебречь, т. е. в области частот $\omega \gg \omega_{Be}$, а следовательно, $\omega \gg \nu_e$, ν_i (см. таблицы I—III). Как правило, для лабораторной плазмы эти условия выполняются в области высоких частот $\omega \gtrsim 10^{10} \text{ сек}^{-1}$.

В пределе $\omega \gg \nu_\alpha$ интеграл столкновений в кинетическом уравнении является малым членом, и решение этого уравнения можно искать методом последовательных приближений, разлагая его по «степеням интеграла столкновений». В нулевом приближении имеем решение (5.3); в первом приближении находим поправку от столкновений частиц данного сорта со всеми остальными частицами (в том числе и с частицами этого же сорта):

$$\delta f_\alpha^{(1)} = \frac{i}{\omega - kv} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left\{ \frac{\partial f_{0\alpha}(\mathbf{p})}{\partial p_j} \delta f_\beta(\mathbf{p}') + \right. \\ \left. + \frac{\partial \delta f_\alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j} f_{0\beta}(\mathbf{p}') - f_{0\alpha}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_\beta(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} - \delta f_\alpha(\mathbf{p}) \frac{\partial f_{0\beta}(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} \right\}. \quad (5.11)$$

Здесь $I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ определяется формулой (4.17), а суммирование распространяется по всем сортам частиц плазмы. Выражение (5.11) приводит к добавке к плотности индуцированного тока в плазме, а следовательно, и к добавке к тензору диэлектрической проницаемости плазмы (5.7) и (5.8). При $\omega \gg kv_{Te, i}$ существенным является лишь электронный добавочный ток, обусловленный столкновениями электронов с ионами. Добавка к $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при этом равна

$$\delta \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = i \frac{\omega_{Ne}^2 \nu_{e\phi\phi}}{\omega^3} \delta_{ij}, \quad (5.12)$$

где (см. (4.42))

$$\nu_{e\phi\phi} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^4 Z^2 N_i L}{T_e^{3/2}}.$$

С учетом (5.12) выражения для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей (5.9) в рассматриваемой области частот, когда $\omega \gg \nu_{e\phi\phi}$, $\omega \gg kv_{Te, i}$,

запишутся в виде

$$\varepsilon^{tr} = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Te}^2}} - i \frac{v_{эфф}}{\omega} \right], \quad (5.13)$$

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left[1 + 3 \frac{k^2 r_{Te}^2}{\omega^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 r_{Te}^2}} - i \frac{v_{эфф}}{\omega} \right].$$

В выражениях (5.13) учет столкновений проявляется лишь в появлении небольших мнимых членов, пропорциональных $v_{эфф}$. Эти члены дают вклад в поглощение волн в плазме, причем они могут стать определяющими, поскольку бесстолкновительные мнимые члены в формулах (5.13) в рассматриваемой области частот экспоненциально малы *). В частности, это имеет место в пределе $k \rightarrow 0$, когда пространственной дисперсией полностью можно пренебречь. При этом

$$\varepsilon^l(\omega, 0) = \varepsilon^{tr}(\omega, 0) = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{v_{эфф}}{\omega} \right). \quad (5.14)$$

В условиях, когда $kv_{Te} \gg \omega$, v_e , а $kv_{Ti} \gg \omega$, v_i , столкновения частиц в плазме не играют существенной роли. В этих условиях доминирующим является бесстолкновительное черенковское поглощение волн частицами плазмы. Поэтому справедливы формулы (5.9), которые принимают следующий вид:

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) \approx 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2}{kv_{Te}\omega}, \quad (5.15)$$

$$\varepsilon^l(\omega, k) \approx 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}.$$

*) В следующем параграфе поясняется, что поглощение слаботухающих поперечных электромагнитных волн в плазме целиком определяется столкновениями частиц, так как фазовые скорости таких волн больше скорости света и мнимая часть $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ в области вещественных ω и k , обусловленная бесстолкновительным черенковским поглощением волн в плазме, строго равна нулю.

Здесь $r_D = \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \right\}^{-1/2} = \left\{ \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{T_{\alpha}} \right\}^{-1/2}$ — дебаевский радиус плазмы.

Наконец, в области частот

$$kv_{Te} \gg \omega, \quad v_e, \quad \omega \gg v_i, \quad \omega \gg kv_{Ti}$$

электронную компоненту плазмы можно считать бесстолкновительной (т. е. в кинетическом уравнении для электронов интегралом столкновений можно пренебречь), столкновения ионов с электронами также пренебрежимо малы; следует учитывать лишь столкновения ионов между собой. В результате для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей плазмы получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(\omega, k) &\approx 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega kv_{Te}}, \\ \varepsilon^l(\omega, k) &= 1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) - \\ &- \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} - i \frac{8}{5} \frac{v_{ii} k^2 v_{Ti}^2}{\omega^3} \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где (см. (4.42))

$$v_{ii} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \frac{e^4 Z^4 N_i L}{T_i^{3/2}}.$$

Подчеркнем, что вклад ионных членов в поперечную диэлектрическую проницаемость в рассматриваемой области частот пренебрежимо мал; в продольную же диэлектрическую проницаемость ионные члены могут дать существенный вклад, в особенности если речь идет о неизотермической плазме с горячими электронами, когда $T_e \gg T_i$.

Заметим, что все приведенные выше выражения для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей относятся как-бы к кинетической области в том смысле, что при решении кинетических уравнений для вывода этих выражений использовались условия, позволяющие столкновительные члены считать малыми.

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, когда $v_{\alpha} \gg \omega, kv_{T\alpha}$ ($\alpha = e, i$) и столкновительные

члены в кинетических уравнениях для электронов и ионов являются главными. В этих условиях для описания движений полностью ионизованной плазмы применимы гидродинамические уравнения (4.20) — (4.46) и при выводе диэлектрических проницаемостей удобно воспользоваться именно ими. Линеаризуя эти уравнения по малым отклонениям относительно однородного равновесного состояния в отсутствие сильных внешних полей и направленных потоков

$$N_\alpha = N_{0\alpha} + \delta N_\alpha, \quad T_\alpha = T_{0\alpha} + \delta T_\alpha, \quad V_\alpha = \delta V_\alpha, \\ E = \delta E, \quad B = \delta B \quad (5.17)$$

и исключая δN_α , δT_α и δB , находим δV_α и тем самым индуцированный в плазме ток $\delta j = \sum_\alpha e_\alpha N_{0\alpha} \delta V_\alpha$. Для возмущенных величин, зависящих от времени и координат по закону $e^{-i\omega t + ikr}$, последнее соотношение позволяет определить тензор проводимости

$$\delta j_i = \sigma_{ij}(\omega, k) \delta E_j, \quad (5.18)$$

а согласно (4.17) также и тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Здесь мы не будем проводить подробнее простые по идее, но довольно громоздкие выкладки (их можно найти в обзоре [41]) и приведем лишь окончательный результат для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей:

$$\varepsilon^{tr} = 1 - 1,96i \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega v_{\phi\phi}}, \\ \varepsilon^l = \begin{cases} 1 + 1,96i \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega v_{\phi\phi}} & \text{при } \omega v_\alpha \gg k^2 v_{T\alpha}^2, \\ 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} & \text{при } \omega v_\alpha \ll k^2 v_{T\alpha}^2. \end{cases} \quad (5.19)$$

Следует отметить, что вклад ионов в поперечную диэлектрическую проницаемость в гидродинамической области частот как и при высоких частотах всегда пренебрежимо мал; в продольную же диэлектрическую проницаемость ионы дают существенный вклад при условии $\omega v_\alpha \ll k^2 v_{T\alpha}^2$.

Рассмотрим теперь случай слабоионизованной плазмы и для получения диэлектрической проницаемости воспользуемся кинетическим уравнением с модельным интегралом БГК. Существенно, что кинетическое уравнение с этим интегралом столкновений легко решается без каких-либо ограничений на области частот и длин волн колебаний. Действительно, предполагая нейтральную компоненту плазмы равновесной и линеаризуя кинетическое уравнение для заряженных частиц $\alpha = e, i$ по малому отклонению δf_α от равновесной функции распределения (5.1), получим

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{\alpha n} (\delta f_\alpha - \eta_\alpha N_\alpha \Phi_{\alpha n}^{(0)}), \quad (5.20)$$

где $\nu_{\alpha n}$ — частота столкновений заряженных частиц сорта α с нейтральными частицами, а

$$\eta_\alpha = \frac{1}{N_\alpha} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha,$$

$$\Phi_{\alpha n}^{(0)} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_{\alpha n})^{3/2}} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_{\alpha n}}}, \quad (5.21)$$

$$T_{\alpha n} = \frac{m_\alpha T_n + M_n T_\alpha}{m_\alpha + M_n}.$$

При получении уравнения (5.20) мы пренебрегли возмущением температуры заряженных частиц («изотермическая модель» [35]). Сделаем еще одно допущение, а именно будем считать, что $T_{\alpha n} = T_\alpha$. Для электронов ($\alpha = e$) это равенство выполняется с точностью до членов $\sim m/M_n$; для ионов же ($\alpha = i$) оно справедливо лишь при равенстве масс и температур ионов и нейтральных частиц. При этих ограничениях, как легко видеть, $\Phi_{\alpha n}^{(0)} N_\alpha = f_{0\alpha}$.

Решение кинетического уравнения (5.20) для плоских монохроматических волн \mathbf{E} , $\delta f_\alpha \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ можем теперь записать в виде

$$\delta f_\alpha = i \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \frac{(\mathbf{v}\mathbf{E}) f_{0\alpha}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha n}} + i \frac{\nu_{\alpha n} \eta_\alpha f_{0\alpha}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_{\alpha n}}. \quad (5.22)$$

Величину η_α легко определить, интегрируя это выражение по импульсу и используя соотношения (5.21). Проще, однако, ее выразить через \mathbf{j}_α , воспользовавшись

уравнением непрерывности для частиц сорта α :

$$\eta_{\alpha} = \frac{k j_{\alpha}}{e_{\alpha} N_{\alpha} \omega}. \quad (5.23)$$

Подставляя это выражение в формулу (5.22) и определяя плотность тока, индуцированного в плазме, после несложных преобразований находим поперечную и продольную диэлектрические проницаемости слабоионизированной плазмы:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{tr}(\omega, k) &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha n})} J_{+} \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{kv_{T\alpha}} \right), \\ \varepsilon^l(\omega, k) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{1 - J_{+} \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{kv_{T\alpha}} \right)}{1 - i \frac{\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n}} J_{+} \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{kv_{T\alpha}} \right)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Суммирование в этих выражениях распространяется лишь на заряженные частицы плазмы.

Формулы (5.24) справедливы при любых соотношениях между ω , $\nu_{\alpha n}$ и $kv_{T\alpha}$.

Любопытно отметить, что согласно (5.15), (5.19) и (5.24) в статическом пределе продольная диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} \quad (5.25)$$

как в случае бесстолкновительной плазмы (при $\omega \ll kv_{T\alpha}$), так и для плазмы со столкновениями (при $\omega \nu_{\alpha} \ll k^2 v_{T\alpha}^2$). Это приводит к тому, что потенциал статического заряда в изотропной плазме всегда является дебаевским, т. е.

$$\Phi(r) = \frac{e_{\alpha}}{r} e^{-r/r_D}. \quad (5.26)$$

Потенциал (5.26) следует непосредственно из формулы (4.13) в статическом пределе (т. е. $\nu_{\alpha} = 0$) при подстановке в нее выражения (5.25). Этот результат еще раз показывает допустимость «обрезания» кулоновского взаимодействия заряженных частиц в плазме на расстояниях, превышающих дебаевский радиус (см. § 4).

§ 6. ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Перейдем теперь к исследованию распространения электромагнитных волн в однородной и изотропной плазме в отсутствие внешних полей. Тензор диэлектрической проницаемости такой плазмы был получен в предыдущем параграфе. Так же, как и там, мы здесь в начале рассмотрим случай бесстолкновительной плазмы и уже затем учтем влияние столкновений частиц.

Общее дисперсионное уравнение для электромагнитных волн (2.13) в случае изотропной среды, как было показано в § 2, распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^l(\omega, k) &= 0, \\ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

соответственно для продольных и поперечных волн в изотропной плазме. Исследуем эти уравнения по отдельности.

а) Продольные волны. В бесстолкновительном пределе ($\omega \gg \nu_e, \nu_i$) уравнение для продольных колебаний плазмы записывается в виде

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right] = 0, \quad (6.2)$$

где $\alpha = e, i$.

В области частот $\omega \gg k v_{T\alpha}$ и при условии $\text{Re} \omega \gg \text{Im} \omega$ уравнение (6.2) сводится к следующему виду (см. формулы (5.10)):

$$1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} = 0. \quad (6.3)$$

В этом уравнении вклад дают лишь электроны; движением ионов можно пренебречь: их роль сводится к нейтрализации заряда электронов. В таких случаях говорят о чисто электронной плазме. Мнимый член в уравнении (6.3) мал по сравнению с вещественным. Поэтому для решения этого уравнения можно воспользоваться методом, изложенным в § 2 при определении спектра слабозатухающих колебаний. В результате находим (напомним нашу запись

$\omega \rightarrow \omega + i\gamma$; см. (2.31))

$$\omega^2 = \omega_{Ne}^2 + 3k^2 v_{Te}^2 = \omega_{Ne}^2 (1 + 3k^2 r_{De}^2),$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}}{k^3 r_{De}^3} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2}},$$
(6.4)

где $r_{De} = v_{Te}/\omega_{Ne}$ — дебаевский радиус электронов. Из условия $\omega \gg kv_{Te}$ следует, что $\omega^2 \approx \omega_{Ne}^2$, а $k^2 r_{De}^2 \ll 1$. Благодаря этому неравенству рассматриваемые колебания оказываются слабозатухающими, причем с ростом длины волны колебания затухание убывает по экспоненциальному

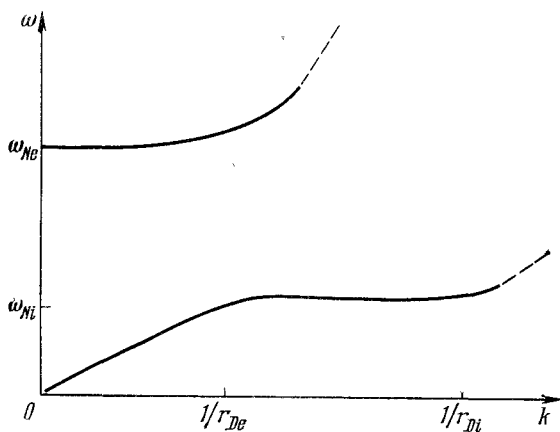


Рис. 2. Спектры продольных волн в однородной изотропной плазме.

закону. Такие колебания плазмы получили название высокочастотных (электронных) ленгмюровских колебаний. Их спектр показан на рис. 2 (верхняя кривая).

Выше мы считали волновой вектор k вещественным и из дисперсионного уравнения (6.3) определяли комплексную частоту ω . Такой подход связан с решением начальной задачи. Не представляет труда решение этого уравнения также и относительно $k(\omega)$ при вещественной частоте ω (граничная задача). С другой стороны, можно непосредственно воспользоваться формулой (2.36), устанавли-

ливающей связь между временным и пространственным затуханиями волн. При этом следует учесть, что согласно (6.4) групповая скорость ленгмюровских волн меньше тепловой скорости электронов:

$$v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 3 \frac{kv_{Te}}{\omega_{Ne}} v_{Te} \ll v_{Te}, \quad (6.5)$$

в то время как их фазовая скорость больше тепловой скорости: $v_{\phi} = \frac{\omega}{k} \approx \frac{\omega_{Ne}}{k} \gg v_{Te}$. В результате для показателя преломления и коэффициента поглощения высокочастотных ленгмюровских волн получим следующие выражения (напомним обозначения: $n = \mu + i\kappa$):

$$\mu^2 = \frac{1 - \omega_{Ne}^2/\omega^2}{3v_{Te}^2/c^2}, \quad (6.6)$$

$$\kappa = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c^5}{\mu^4 v_{Te}^5} e^{-\frac{c^2}{2\mu^2 v_{Te}^2}}.$$

Учитывая эти выражения, находим

$$v_{гр} \approx 3\mu \frac{v_{Te}^2}{c} = v_{Te} \sqrt{3 \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2}\right)} = v_{\phi} \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2}\right) \ll v_{Te}, \quad (6.7)$$

$$v_{\phi} = \frac{c}{\mu} = v_{Te} \sqrt{\frac{3}{1 - \omega_{Ne}^2/\omega^2}} \gg v_{Te}.$$

Из формул (6.4) видно, что с ростом волнового числа k (т. е. с уменьшением длины волны $\lambda \sim 1/k$) затухание ленгмюровских колебаний растет. Эти формулы, однако, непригодны для описания коротковолновых колебаний, когда $k \gtrsim 1/r_{De}$. В этой области длин волн ленгмюровские колебания становятся сильно затухающими. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим предел $\text{Im } \omega \gg \text{Re } \omega$ (считая при этом, что $\omega \gg kv_{Te}$). Используя асимптотическое представление (5.10), дисперсионное уравнение (6.2) сведем к виду

$$1 + i \sqrt{2\pi} \frac{\omega}{kv_{Te}} \frac{1}{k^2 r_{De}^2} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}} = 0. \quad (6.8)$$

Производя замену $\omega = -ikv_{Te}\xi$ и учитывая, что $\text{Re } \xi \gg \gg \text{Im } \xi$ ($\xi = \text{Re } \xi + i \text{Im } \xi$), причем $\text{Re } \xi \gg 1$, из уравнения (6.8) получим

$$k^2 r_{De}^2 + \sqrt{2\pi} \xi e^{\xi^2/2} = 0. \quad (6.9)$$

Отделяя вещественную и мнимую части этого уравнения, легко показать, что единственным решением, удовлетворяющим требуемым условиям $\text{Re } \xi \gg 1$, $\text{Im } \xi \ll 1$, является решение $\text{Im } \xi = \pi/\text{Re } \xi$, а $\text{Re } \xi = \sqrt{\ln k^2 r_{De}^2}$ или

$$\frac{\omega}{kv_{Te}} \approx -\frac{\pi}{\sqrt{\ln k^2 r_{De}^2}} - i \sqrt{\ln k^2 r_{De}^2}. \quad (6.10)$$

Из условия $\omega \gg kv_{Te}$ видим, что $k^2 r_{De}^2 \gg 1$, т. е. выражение (6.10) справедливо в пределе коротких длин волн, противоположном рассмотренному выше пределу длинноволновых колебаний. Спектр (6.10), таким образом, продолжает спектр ленгмюровских колебаний (6.4) в область коротких длин волн. Эти колебания, однако, являются сильно затухающими, и их лишь условно можно называть колебаниями (поэтому на рис. 2 эта часть спектра высокочастотных ленгмюровских колебаний обозначена пунктиром).

Рассмотренное выше бесстолкновительное затухание ленгмюровских колебаний электронной плазмы как в области длинных, так и в области коротких волн впервые было обнаружено Ландау [20], и его часто называют затуханием Ландау. По своей природе это затухание представляет собой черенковское поглощение продольных волн электронами плазмы (см. § 5). В области длинных волн фазовая скорость таких колебаний значительно больше тепловой скорости электронов ($v_\phi \gg v_{Te}$), и поэтому такие волны слабо поглощаются в плазме; в их поглощении принимает участие лишь небольшая доля быстрых электронов («хвост» распределения Максвелла). Напротив, в области коротких длин волн, согласно (6.10),

$$\text{Re } \frac{\omega}{k} \approx \frac{v_{Te}}{\sqrt{\ln k^2 r_{De}^2}} \ll v_{Te}, \text{ и в поглощении волн принимает}$$

участие основная часть электронов плазмы. Именно поэтому коротковолновые ленгмюровские колебания плазмы оказались сильно затухающими.

Рассмотрим теперь область более низких, промежуточных частот ($kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$). При условии $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$

дисперсионное уравнение (6.2) в рассматриваемой области частот приобретает следующий вид:

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right) = 0. \quad (6.11)$$

Мнимые члены в этом уравнении малы по сравнению с действительными. Поэтому его решение можно приближенно записать следующим образом ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Ni}^2 [1 + 3k^2 r_{Di}^2 (1 + k^{-2} r_{De}^{-2})]}{1 + k^{-2} r_{De}^{-2}}, \quad (6.12)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{m} \frac{1}{Z} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3} \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right]$$

(напомним, что $Z = \left| \frac{e_i}{e} \right|$). Спектр рассматриваемых колебаний

плазмы показан на рис. 2 (нижняя кривая). Необходимо сразу отметить, что из условия $\omega \gg k v_{Ti}$ следует, что такие колебания с $\omega \gg \gamma$ возможны лишь в неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$ и, кроме того, только в области длин волн $k^2 r_{Di}^2 \ll 1$.

Совершенно так же, как и в случае электронных ленгмюровских колебаний, можно показать, что в пределе очень коротких длин волн, когда $k^2 r_{Di}^2 \gg 1$, спектр (6.12) переходит в спектр сильно затухающих колебаний, описываемых уравнением (которое следует из (6.2) при $\text{Im } \omega \gg \text{Re } \omega$, $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}$, ср. с (6.8))

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} + i \sqrt{2\pi} \frac{\omega \omega_{Ni}^2}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} = 0. \quad (6.13)$$

Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный (6.10):

$$\frac{\omega}{k v_{Ti}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{\ln \left(k^2 r_{Di}^2 + \frac{T_i}{Z T_e} \right)}} - i \sqrt{\ln \left(k^2 r_{Di}^2 + \frac{T_i}{Z T_e} \right)}. \quad (6.14)$$

На рис. 2 эта часть спектра ионных колебаний обозначена пунктиром.

В области более длинных волн, когда $\frac{1}{r_{De}} \lesssim k \lesssim \frac{1}{r_{Di}}$, колебания неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$ со спектром (6.12) являются слабозатухающими, причем их частота близка к ионной ленгмюровской частоте, т. е. $\omega \approx \omega_{Ni}$ (горизонтальный участок на рис. 2).

Наконец, в области самых длинных волн, когда $kr_{De} \ll 1$, спектр (6.12) переходит в так называемый спектр ионно-звуковых колебаний:

$$\omega^2 = k^2 Z \frac{T_e}{M} \left(1 + 3 \frac{T_i}{Z T_e} \right), \quad (6.15)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega \sqrt{Z \frac{m}{M}} \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{3}{2} - \frac{Z T_e}{2 T_i}} \right].$$

Такие колебания неизотермической плазмы называют ионно-звуковыми в силу аналогии спектра (6.15) со спектром обычных звуковых колебаний жидкости с фазовой скоростью $v_s = \sqrt{Z \frac{T_e}{M} \left(1 + 3 \frac{T_i}{Z T_e} \right)}$ (см., например, [23]). Более того, спектр частот ω (6.15) без декремента γ может быть получен из уравнений гидродинамики бесстолкновительной неизотермической плазмы (3.36) (в отсутствие магнитного поля), что также указывает на родственность рассматриваемых колебаний со звуковыми колебаниями жидкости.

Приведем теперь выражения для показателя преломления и коэффициента поглощения для слабозатухающих ионных волн в неизотермической плазме, которые можно получить как непосредственно из дисперсионного уравнения (6.11), так и с помощью формул (2.36). Учитывая, что $k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} (\mu + i\kappa)$ и $\mu \gg \kappa$, находим

$$\mu^2 = \frac{\omega_{Ne}^2 c^2}{\omega^2 v_{Te}^2} \left\{ \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \frac{T_i / T_e Z}{\frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} - 1} \right) - 1 \right\}^{-1}, \quad (6.16)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \frac{c^3}{\mu^2 v_{Ti}^3} \frac{\frac{1}{Z} \sqrt{\frac{m}{M}} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} + \exp\left(-\frac{c^2}{2\mu^2 v_{Ti}^2}\right)}{\frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{\mu^2 v_{Ti}^2}{c^2} \right) - 1}.$$

В пределе низких частот $\omega \ll \omega_{Ni}$, соответствующих ионно-звуковым колебаниям плазмы, формулы (6.16) существенно упрощаются и принимают вид

$$\mu^2 = \frac{c^2}{v_s^2}, \quad (6.17)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{c}{v_s} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left[\frac{1}{Z} \sqrt{\frac{m}{M}} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} + e^{-\frac{c^2}{2\mu^2 v_s^2 T_i}} \right].$$

Отсюда видно, что в низкочастотном пределе отсутствует частотная дисперсия показателя преломления и коэффициента поглощения.

Выше мы неоднократно отмечали, что колебания со спектром (6.12) возможны только в существенно неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$. Выясним, какова должна быть эта «неизотермичность» и могут ли такие колебания, являясь слабозатухающими, существовать в ионосферной плазме. Из требования $\text{Im } \epsilon^l \ll \text{Re } \epsilon^l$ (условие слабости поглощения продольных волн в плазме) следует, что

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} x^3 e^{-x^2/2} \ll 1, \quad (6.18)$$

где $x^2 = \omega^2/k^2 v_{Ti}^2 \gg 1$ (в действительности использованная выше асимптотика функции $J_+(x)$ пригодна уже при $x^2 > 4$). Отсюда находим, что рассматриваемые колебания могут быть слабозатухающими лишь при $T_e/T_i \gtrsim x^2 > 6$.

В ионосферной плазме столь высокая степень неизотермичности, по-видимому, не имеет места; как отмечалось в § 1, на высотах 200—300 км, где достигается максимальная неизотермичность, отношение $T_e/T_i \leq 2 \div 3$. По этой причине существование слабозатухающих ионных колебаний типа ионного звука в ионосферной плазме сомнительно. Иное положение имеет место в лабораторной плазме, в особенности в плазме газового разряда, где, как

правило, $\frac{T_e}{T_i} \gtrsim 10^2$. Существование ионно-звуковых колебаний в такой плазме не вызывает сомнений и, более того, именно в плазме газового разряда они в основном и исследуются экспериментально. Что же касается высокочастотных электронных ленгмюровских колебаний, то они безусловно возможны как в лабораторной, так и в ионо-

сферной плазме. При этом такие колебания в бесстолкновительной плазме являются слабозатухающими ($\omega \gg \gamma$), если $k^2 r_D^2 < 1/6$. Это значит, что в ионосферной плазме их длина волны должна превышать несколько сантиметров (см. табл. III).

Наконец, в области самых низких частот ($\omega \ll kv_{Ti}$) продольная диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы имеет вид (5.25) и вообще не зависит от частоты. В этом случае говорят, что продольное поле не проникает в плазму, а экранируется, причем радиус экранировки можно определить из дисперсионного уравнения

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} = 0, \quad (6.19)$$

разрешив его относительно k (граничная задача); он равен $r_{\text{экр}} \sim \frac{1}{\text{Im}k} \sim r_D$ и не зависит от частоты поля. Получающаяся экранировка не носит диссипативного характера и обусловлена поляризацией плазмы.

Аналогичная экранировка имеет место и при условиях $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}$ в области частот $\omega \gg \omega_{Ni}$. В этом случае дисперсионное уравнение (6.11) также не зависит от частоты и приводит к радиусу экранировки $r_{\text{экр}} \sim \frac{1}{\text{Im}k} \sim r_{De}$.

До сих пор мы полностью пренебрегали столкновениями частиц в плазме. Теперь учтем их и рассмотрим, как они влияют на спектры продольных колебаний изотропной немагнитоактивной плазмы. Как уже указывалось выше, для ионосферной плазмы влиянием магнитного поля Земли на спектр продольных колебаний можно пренебречь в области частот $\omega \gg \omega_{Be}$; поскольку в ионосфере всюду $\omega_{Be} \gg v_e, v_i$, то пренебрежение магнитным полем автоматически означает, что $\omega \gg v_e, v_i$. Ниже именно такому случаю и уделяется основное внимание, тем более, что в изотропной лабораторной плазме только такие колебания оказываются слабозатухающими.

Рассмотрим прежде всего предел высоких частот $\omega \gg \gg kv_{Te}, kv_{Ti}$; $\omega \gg v_e, v_i$, когда возможны электронные ленгмюровские колебания. Из формул (5.13) и (5.24) следует, что в этом случае в левой части дисперсионного уравнения продольных волн (6.3) вследствие учета

столкновений частиц появляется малая чисто мнимая поправка:

$$i \frac{\omega_{Ne}^2 v_e}{\omega^3}, \quad (6.20)$$

где $v_e = v_{эфф}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$ в случае слабоионизованной плазмы. Эта поправка учитывает столкновительное поглощение электронных ленгмюровских колебаний в плазме и меняет их декремент затухания (6.4), который теперь записывается в виде

$$\gamma = -\frac{v_e}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}}{k^3 r_{De}^3} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2}}. \quad (6.21)$$

Спектр же частот в этом приближении не изменяется.

Из выражения (6.21) следует, что при условии

$$v_e > \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}}{k^3 r_{De}^3} e^{-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2}} \quad (6.22)$$

в основном именно столкновения электронов определяют диссипацию продольных волн в плазме; в противном случае (область более коротких длин волн) определяющим является затухание Ландау. В частности, в пределе очень коротких длин волн, когда $k^2 r_{De}^2 \gg 1$, $\omega \gg kv_{Te}$, столкновениями можно пренебречь, и спектр сильно затухающих продольных колебаний, так же как и в бесстолкновительной плазме, определяется формулой (6.10).

Дисперсионное уравнение (6.11) для продольных волн в области промежуточных частот при учете столкновений частиц в плазме также меняется. При этом оказывается, что в пределе $\omega \gg v_i$ и при условии $v_e \ll kv_{Te}$ *) определяющую роль играют столкновения ионов с ионами либо с нейтральными частицами, учет которых приводит к появлению в левой части уравнения (6.11) дополнительного слагаемого, равного

$$i \frac{8}{5} \frac{\omega_{Ni}^2 v_i k^2 v_{Ti}^2}{\omega^5} \quad (6.23)$$

*) Заметим, что отношение между ω и v_e при этом может быть произвольным.

в случае полностью ионизованной плазмы и

$$i \frac{\omega_{Ni}^2 v_{in}}{\omega^3} \quad (6.24)$$

для слабоионизованной плазмы. Эти слагаемые приводят к малым мнимым поправкам в уравнении (6.11), и поэтому они не меняют спектра частот ионно-звуковых колебаний (6.12) и (6.15), но меняют декремент их затухания на величину

$$\delta\gamma = \begin{cases} -\frac{4}{5} v_{ii} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} & \text{для полностью ионизованной плазмы,} \\ -\frac{v_{in}}{2} & \text{для слабоионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (6.25)$$

Следует заметить, что ионно-звуковые колебания возможны также и в условиях больших частот столкновений, когда длина волны больше длины свободного пробега электронов $v_e \gg kv_{Te}$. При этом, однако, для справедливости формул (6.15) с изотермической скоростью звука электронная теплопроводность должна быть высокой, так чтобы $\omega v_e \ll k^2 v_{Te}^2$, а столкновения ионов должны быть редкими (неравенства $\omega \gg kv_{Ti}, v_i$). Легко показать, что указанные условия могут выполняться только в слабоионизованной плазме. Действительно, в полностью ионизованной неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$ неравенства

$$v_e \gg kv_{Te} \sim kv_s \sqrt{\frac{M}{m}} \gg v_i \sqrt{\frac{M}{m}} \sim v_{ii} \frac{T_i}{T_e} \sqrt{\frac{M}{m}} \sim v_e \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}$$

внутренне противоречивы. Для слабоионизованной же плазмы дисперсионное уравнение продольных ионно-звуковых колебаний в рассматриваемых условиях записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \frac{\omega v_{en}}{k^2 v_{Te}^2} \right) - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} - i \frac{v_{in}}{\omega} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right) = 0. \quad (6.26)$$

Очевидно, в этом уравнении изменились по сравнению с (6.11) лишь малые диссипативные слагаемые, в частности, вместо черенковской диссипации на электронах появилась столкновительная диссипация, обусловленная большой, но конечной теплопроводностью электронов (роль столкновений ионов уже обсуждалась выше). Поэтому спектр частот ионно-звуковых колебаний не изменяется и по-прежнему определяется формулами (6.12) и (6.15). Декремент же их затухания в рассматриваемых условиях дается общим выражением (ср. с (6.12))

$$\gamma = -\frac{v_{in}}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} - \frac{1}{Z} \frac{M}{m} \frac{\omega^4 v_{en}}{2k^4 v_{Te}^4}, \quad (6.27)$$

который в длинноволновом пределе, когда спектр частот дается формулой (6.15), принимает вид (ср. с (6.15))

$$\gamma = -\frac{v_{in}}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega \left(Z \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{Z T_e}{2 T_i}} - \frac{3}{2} - \frac{m}{2M} v_{en}. \quad (6.28)$$

В заключение заметим, что сами понятия «слабоионизованная» и «полностью ионизованная» плазма, по сути дела, определяются из сравнения столкновительных поправок к диэлектрической проницаемости (либо к декременту затухания колебаний), обусловленных столкновениями заряженных частиц между собой и заряженных частиц с нейтральными частицами. Исходя из этого определения, мы видим, что в случае ленгмюровских колебаний плазму можно считать полностью ионизованной, если $v_{эфф} \gg v_{en}$, а для ионных колебаний — если $v_{ii} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \sim v_{ii} \frac{T_i}{T_e} \gg v_{in}$, в обратных случаях плазму следует считать слабоионизованной.

б) Поперечные волны. Распространение поперечных волн в изотропной плазме определяется вторым уравнением (6.1). В бесстолкновительном пределе $\omega \gg v_e$, v_i это уравнение записывается в виде (см. формулу (5.9))

$$k^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \omega_{N\alpha}^2 J_{+} \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) = 0. \quad (6.29)$$

В области высоких частот, когда $\omega \gg kv_{Te}, kv_{Ti}$, отсюда находится спектр поперечных электромагнитных колебаний изотропной плазмы

$$\omega^2 = \omega_{Ne}^2 + k^2c^2, \quad (6.30)$$

который графически изображен на рис. 3. В отличие от спектра ленгмюровских колебаний (6.4) выражение (6.30) справедливо в пределе сколь угодно коротких длин волн. При $kc \gg \omega_{Ne}$ спектр (6.30) соответствует спектру электромагнитных волн в вакууме.

При решении дисперсионного уравнения (6.29) и определения спектра (6.30) мы умышленно полностью пренебрегли мнимыми слагаемыми в этом уравнении, обусловленными черенковским поглощением воли в плазме. Дело в том, что фазовая скорость высокочастотных поперечных колебаний, как видно из

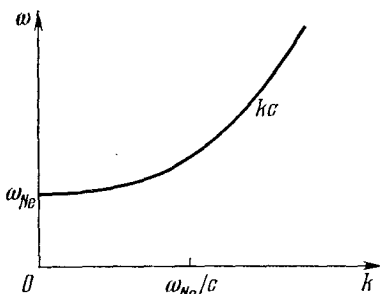


Рис. 3. Спектр поперечных волн в однородной изотропной плазме.

выражения (6.30), больше скорости света, $v_{\phi} = \frac{\omega}{k} > c$. Поэтому такие волны не испытывают черенковского поглощения в плазме. Для бесстолкновительной плазмы в области частот $\omega > kc$, $\text{Im } \epsilon^{tr}(\omega, k) \equiv 0$. Отличие мнимой части выражения (5.9) (а следовательно, и мнимых слагаемых в уравнении (6.29)) от нуля связано с тем, что максвелловское распределение (5.1), которое было использовано при выводе диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы, формально допускает существование частиц со сколь угодно большими скоростями, которые и приводят к черенковскому поглощению волн с фазовой скоростью $v_{\phi} > c$. Для описания поглощения таких волн в бесстолкновительной плазме нужно пользоваться релятивистским рассмотрением [2]. При этом оказывается, как и следовало ожидать, что в действительности при $\omega > kc$ мнимая часть $\text{Im } \epsilon^{tr}(\omega, k)$ строго равна нулю и поглощение отсутствует; спектр же частот (6.30) остается неизменным. Заметим также, что, в отличие от фазовой скорости, групповая

скорость поперечных волн в изотропной плазме всегда меньше скорости света. Действительно, согласно (6.30)

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_{Ne}^2/k^2c^2}} < c. \quad (6.31)$$

Таким образом, поглощение высокочастотных поперечных волн в плазме полностью обусловлено столкновениями частиц. При учете столкновений дисперсионное уравнение для высокочастотных ($\omega > v_e$, kv_{Te}) поперечных волн записывается в виде (см. формулы (5.13), (5.24))

$$k^2c^2 - \omega^2 + \omega_{Ne}^2 \left(1 - i \frac{v_e}{\omega}\right) = 0, \quad (6.32)$$

где $v_e = v_{\text{эфф}}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$ для слабоионизованной плазмы. Спектр частот, определяемый этим уравнением, совпадает со спектром (6.30); декремент затухания колебаний при этом равен

$$\gamma = -\frac{v_e}{2} \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2c^2 + \omega_{Ne}^2}. \quad (6.33)$$

Из формул (6.30) — (6.33) следует, что по отношению к высокочастотным поперечным колебаниям плазму, как бесстолкновительную, так и при учете столкновений частиц, можно считать чисто электронной (с точностью до членов $\sim m/M$). Анализ показывает, что движением ионов в поперечной волне можно пренебречь также и в области низких частот, когда $\omega \ll kv_{Te}$. В этой области частот из дисперсионного уравнения (6.29) для бесстолкновительной плазмы получаем

$$\omega = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k^3c^2v_{Te}}{\omega_{Ne}^2}, \quad (6.34)$$

т. е. частота поперечных колебаний является чисто мнимой. Это означает, что низкочастотные поперечные возмущения в плазме аperiodически затухают со временем. Заметим, что формула (6.34) остается справедливой также и в области самых низких частот, когда $\omega \ll kv_{Ti}$. Более того, она остается в силе и при учете столкновений частиц в плазме, если только $v_e \ll kv_{Te}$. Аperiodическое затухание колебаний в этом случае обусловлено их интенсивным черенковским поглощением электронами плазмы. Если же $v_e \gg kv_{Te}$, то поглощение низкочастотных поперечных волн в плазме ($\omega \ll v_e$) будет происходить вследствие столк-

новений электронов. Из второго уравнения (6.1) при подстановке выражений (5.19) и (5.24) в этом случае следует, что

$$\omega = -i \frac{k^2 c^2}{4\pi\sigma}, \quad (6.35)$$

где σ — статическая проводимость плазмы, причем

$$\sigma = \begin{cases} 1,96 \frac{\omega_{Ne}^2}{4\pi\nu_{эфф}} & \text{для полностью ионизованной плазмы,} \\ \frac{\omega_{Ne}^2}{4\pi\nu_{en}} & \text{для слабоионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (6.36)$$

Выше мы всюду решали дисперсионные уравнения относительно ω , имея в виду начальную задачу — исследование развития во времени малых колебаний. Не представляет, однако, труда из этих же решений получить комплексную функцию $k(\omega)$, характеризующую распространение волн в пространстве (граничная задача), величина которой в рассматриваемом случае изотропной плазмы оказывается не зависящей от направления распространения волны.

Так, из формул (6.30) — (6.33) находим показатель преломления $\mu(\omega)$ и коэффициент поглощения $\kappa(\omega)$ высокочастотной поперечной волны в изотропной плазме (см. определение (2.31), а также формулу (2.36)):

$$\mu^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2}, \quad (6.37)$$

$$\kappa = \frac{\nu_e}{2\mu} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^3} = \frac{\nu_e}{2\omega\mu} (1 - \mu^2).$$

Отсюда, кстати, следует, что рассматриваемые волны могут распространяться в плазме лишь при условии $\omega^2 > \omega_{Ne}^2$. В противном случае $\mu^2 < 0$, а это означает, что происходит практически полное внутреннее отражение волны от границы плазмы (поскольку $|\mu| \gg \kappa$, подробнее см., например, [1]). Глубина проникновения поля в плазму при этом равна $\delta \sim 1/\text{Im } k \approx c/\omega_{Ne}$.

Совершенно иной характер носит проникновение в плазму низкочастотных поперечных волн с частотой

$\omega \ll v_{Te} \delta^{-1} \approx \frac{v_{Te}}{c} \omega_{Ne}$. Так, из формулы (6.34) (разрешая ее относительно $k(\omega)$) находим, что глубина проникновения поля в бесстолкновительную плазму определяется выражением

$$\delta \sim \frac{1}{\text{Im } k} = 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{c^2 v_{Te}}{\omega \omega_{Ne}^2} \right)^{1/2}. \quad (6.38)$$

В этом случае не происходит полного внутреннего отражения волны; наряду с отражением имеет место сильное поглощение поля в плазме на глубине порядка δ . Видно, что с уменьшением частоты поля ω глубина проникновения поперечной волны в плазму возрастает и в пределе ($\omega \rightarrow 0$) неограниченно велика: $\delta \rightarrow \infty$. Это означает, что статическое вихревое поле (например, магнитное поле) хорошо проникает в плазму.

В этом отношении поперечное поле существенно отличается от продольного, которое, как уже отмечалось выше (см. § 5), в статическом пределе не проникает в плазму, а экранируется на длине порядка дебаевского радиуса.

Формула (6.38), характеризующая глубину проникновения низкочастотного поперечного электромагнитного поля в плазму, получила название формулы для аномального скин-эффекта в плазме. Она отличается от формулы для нормального скин-эффекта, которая характеризует проникновение низкочастотного поперечного поля в столкновительную плазму (а также в любой проводник, см., например, [8]) и согласно (6.35) имеет вид

$$\delta \sim \frac{1}{\text{Im } k} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\zeta}}. \quad (6.39)$$

В условиях $v_e \ll v_{Te} \delta^{-1}$ глубина проникновения поперечного поля в плазму определяется формулой (6.38), т. е. скин-эффект носит аномальный характер, а при $v_e \gg v_{Te} \delta^{-1}$ скин-эффект является нормальным и глубина δ определяется выражением (6.39).

В заключение приведем таблицу для спектров частот, декрементов затухания, показателей преломления и коэффициентов поглощения для слабозатухающих ($\omega \gg \gamma$, $\mu \gg \kappa$) электромагнитных волн в однородной и изотропной плазме, составленную по результатам настоящего параграфа.

Тип волн	Спектр частот $\omega^2, \text{сек}^{-2}$	Декремент затухания $\gamma, \text{сек}^{-1}$	Показатель преломления μ^2	Коэффициент поглощения κ
<p>Электронные продольные ленгмюровские волны</p> <p>$\omega \gg kv_{Te}, v_e$</p> <p>$\mu \ll c/v_{Te}$</p>	$\omega_{Ne}^2 (1 + 3k^2 r_{De}^2)$	$-\frac{v_e}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}}{k^3 r_{De}^3} \times$ $\times \exp \left\{ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_{De}^2} \right\}$	$\frac{c^2}{3v_{Te}^2} \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \right)$	$-\frac{c\gamma}{\sqrt{3}v_{Te}} (\omega^2 - \omega_{Ne}^2)^{-1/2}$
<p>Ионные продольные волны</p> <p>$\omega \gg kv_{Ti}, v_i$</p> <p>$kv_{Te} \gg \omega, v_e$</p> <p>$\frac{c}{v_{Ti}} \gg \mu \gg \frac{c}{v_{Te}}$</p>	$\frac{\omega_{Ni}^2}{1 + 1/k^2 r_{De}^2}$	$-\frac{v_i}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{Zm} \times$ $\times \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3} \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \times \right.$ $\left. \times \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}} \right]$	$\frac{c^2}{v_s^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} \right)^{-1}$	$-\frac{c\gamma}{v_s \omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} \right)^{-3/2}$

Тип волн	Спектр частот ω^2 , сек ⁻²	Декремент затухания γ , сек ⁻¹	Показатель преломления μ^2	Коэффициент поглощения κ
Низкочастотные продольные ионно-звуковые колебания	$k^2 v_s^2 = k^2 Z \frac{T_e}{M}$	$-\frac{v_i}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8} Z \frac{m}{M}} \omega \times$ $\times \left[1 + Z \sqrt{\frac{M}{m}} \times \right.$ $\left. \times \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{3}{2}} - Z \frac{T_e}{2T_i} \right]$	$\frac{c^2}{v_s^2}$	$-\frac{c}{v_s} \frac{\gamma}{\omega}$
Поперечные электромагнитные волны $\omega \gg v_e, kv_{Te}$	$\omega_{Ne}^2 + k^2 c^2$	$-\frac{v_e}{2} \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 c^2 + \omega_{Ne}^2}$	$1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2}$	$\frac{v_e}{2\mu} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^3}$

Здесь $v_e = v_{эфф}$ для полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$ для слабоионизованной соответственно
 $v_i = v_{ii} \frac{8}{5} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} = \frac{8}{5} v_{ii} \frac{\mu^2 v_{Ti}^2}{c^2}$ и $v_i = v_{in}$.

§ 7. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Анализ, проведенный в § 6, показал, что в изотропной плазме в отсутствие внешних полей существуют лишь три ветви слабозатухающих колебаний; две из них соответствуют продольным, а одна — поперечным колебаниям поля. Это — высокочастотные электронные ленгмюровские и низкочастотные ионно-звуковые продольные волны (последние могут распространяться лишь в неизотермической плазме, в которой $T_e > 6T_i$; см. § 6) и высокочастотные поперечные электромагнитные волны.

При наличии в плазме сильного магнитного поля картина даже в случае слабых электромагнитных колебаний становится значительно многообразней: появляется большое число различных ветвей колебаний, как высокочастотных, так и низкочастотных. Анализ всех возможных ветвей колебаний магнитоактивной плазмы выходит далеко за рамки настоящей монографии. Поэтому здесь мы ограничимся исследованием лишь таких волн, которые могут распространяться в ионосферной плазме, причем основное внимание будем уделять слабозатухающим волнам. Напомним, что с другими специальными вопросами теории распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме читатель сможет познакомиться, обратившись к монографиям [1—6].

Анализ спектров колебаний магнитоактивной плазмы, как и выше, начнем с нахождения тензора диэлектрической проницаемости. В § 3 уже был получен тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы (см. формулы (3.7) — (3.9)) для простейшей модели независимых частиц. Здесь мы получим тензор $\epsilon_{ij}(\omega, k)$, исходя из кинетического уравнения (либо в условиях, когда она применима, из двухжидкостной гидродинамики плазмы); при этом будут выяснены условия применимости простейших формул (3.7) — (3.9), которые часто называют формулами «элементарной теории» и широко используют при исследовании распространения электромагнитных волн в ионосфере (см., например, [1, 10]).

Рассмотрим вначале бесстолкновительную плазму в предположении, что распределение частиц по скоростям в основном состоянии является максвелловским (5.1). Направляя ось z вдоль внешнего магнитного поля и используя цилиндрическую систему координат в простран-

стве скоростей v_{\perp} , φ и v_z ($v_x = v_{\perp} \cos \varphi$, $v_y = v_{\perp} \sin \varphi$), кинетическое уравнение для возмущенной функции распределения частиц сорта α запишем в виде

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta f_{\alpha} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \varphi} + e_{\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (7.1)$$

Здесь зависимость возмущенных величин от времени и координат считается имеющей вид $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Решение уравнения (7.1), периодическое по φ (с периодом 2π), имеет вид

$$\begin{aligned} \delta f_{\alpha} &= \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} \int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \left(\mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right) e^{\frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} = \\ &= \frac{e_{\alpha} i}{T_{\alpha}} f_{0\alpha} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}} e^{-is\varphi + i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \sin \varphi} \times \\ &\times \left\{ \frac{s\omega_{B\alpha}}{k_{\perp}} J_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) E_x + i v_{\perp} J'_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) E_y + v_z J_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) E_z \right\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где s принимает целочисленные значения.

При получении этого выражения мы выбрали систему координат таким образом, чтобы вектор \mathbf{k} лежал в плоскости xz , т. е. $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_z)$. Подставляя выражение (7.2) в формулу для плотности тока (3.17), индуцированного в плазме, находим проводимость и тем самым искомый тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной магнитоактивной плазмы:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega \omega_{B\alpha}} \int d\mathbf{p} v_i \int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j} e^{\frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} = \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial E_{\alpha}} \sum_s \frac{F_{i\alpha} F_{j\alpha}^*}{\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $E_{\alpha} = m_{\alpha} v^2 / 2$ — энергия частицы, а

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \left(\frac{s\omega_{B\alpha}}{k_{\perp}} J_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right); -i v_{\perp} J'_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right); v_z J_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) \right).$$

Интегрирование в формуле (7.3) следует проводить по контуру с обходом полюса $\omega = k_z v_z + s\omega_{B\alpha}$ снизу (см. § 5), или, что то же самое, знаменатель подынтегрального

выражения надо понимать как

$$\frac{1}{\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}} = \frac{\mathcal{P}}{\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}} - i\pi\delta(\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}), \quad (7.4)$$

где символ \mathcal{P} означает главное значение. При такой записи тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы явно видны циклотронные резонансы, связанные с обращением знаменателя $\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}$ в нуль. Слагаемые, содержащие главное значение интеграла (символ \mathcal{P}), составляют при этом эрмитовскую часть тензора $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, а слагаемые с δ -функциями — антиэрмитовскую часть, ответственную за поглощение волн в плазме. Таким образом, в поглощении волн в плазме при отсутствии столкновений участвуют лишь те частицы, для которых выполняется условие $\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha} = 0$.

Природу такого поглощения легко понять, если учесть, что свободная заряженная частица в магнитном поле вращается с частотой $\omega_{B\alpha} = e_\alpha B_0 / m_\alpha c$ вокруг магнитного поля и равномерно движется со скоростью v_z вдоль поля. Движущаяся таким образом частица излучает электромагнитные волны как вследствие наличия ускорения (магнитотормозное или циклотронное излучение), так и при выполнении соответствующего условия в силу эффекта Вавилова — Черенкова. Легко показать (см., например, [1]), что частоты излучаемой волны при этом определяются из условия

$$\omega = s\omega_{B\alpha} + k_z v_z, \quad (7.5)$$

где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Условие (7.5) при $s = 0$ соответствует черенковскому излучению, а при $s \neq 0$ — магнитотормозному излучению.

Если частица испускает излучение с какой-то частотой ω , то она, очевидно, будет также и поглощать это излучение. Для спадающего по скоростям распределения частиц в плазме число поглощающих излучение частиц больше, чем число испускающих. Поэтому в целом излучение в такой плазме будет поглощаться. В этом и состоит физическая природа бесстолкновительного поглощения электромагнитных волн частицами в плазме.

Следует особо отметить, что при $k_z = 0$ антиэрмитовская часть тензора $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ равна нулю и поглощение таких волн (распространяющихся строго поперек магнитного поля) в бесстолкновительной плазме отсутствует. Действительно, из выражения (7.3) при учете (7.4) видно,

что при $k_z = 0$ вклад членов, содержащих δ -функцию, в диэлектрическую проницаемость плазмы равен нулю *). Это утверждение, однако, справедливо лишь в случае, когда $\omega \lesssim \omega_{B\alpha}$ для каждого сорта частиц. В пределе больших частот $\omega \gg \omega_{B\alpha}$ магнитным полем можно пренебречь, а это означает, что поглощение должно иметь место и при $k_z = 0$, так как этот предел соответствует плазме без внешнего магнитного поля. Переход к такому пределу в формулах (7.2), (7.3) нетривиален и затрагивает сложный математический вопрос об асимптотических представлениях функций Бесселя при больших значениях аргумента и индекса (см. [42, 43]). При $\omega_{B\alpha} \rightarrow 0$ аргументы функций Бесселя в формулах (7.2) — (7.3) велики. При этом слагаемые с $|s| < s_{\max} = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{B\alpha}$ дают в указанных формулах вклады одного и того же порядка; вклад же слагаемых с $|s| > s_{\max}$ экспоненциально мал. Поэтому суммирование в формулах (7.2), (7.3) при $\omega_{B\alpha} \rightarrow 0$ следует проводить до $s = s_{\max}$, что приведет к появлению знаменателя вида $\omega - s_{\max} \omega_{B\alpha} = \omega - k_{\perp} v_{\perp} = \omega - kv$, а следовательно, и к бесстолкновительному поглощению воли (затухание Ландау). Для максвелловского распределения $f_{0\alpha}$ тензор $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ вычисляется до конца в том смысле, что выражается через табулированные интегралы (см. [40, 42]):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= 1 - \sum_{\alpha} \sum_s \frac{s^2 \omega_{N\alpha}^2}{\omega(\omega - s\omega_{B\alpha})} \frac{A_s(Z_{\alpha})}{Z_{\alpha}} J_+(\beta_{s\alpha}), \\
 \epsilon_{yy} &= \epsilon_{xx} + 2 \sum_{\alpha} \sum_s \frac{\omega_{N\alpha}^2 Z_{\alpha}}{\omega(\omega - s\omega_{B\alpha})} A'_s(Z_{\alpha}) J_+(\beta_{s\alpha}), \\
 \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = -i \sum_{\alpha} \sum_s \frac{s\omega_{N\alpha}^2}{\omega(\omega - s\omega_{B\alpha})} A'_s(Z_{\alpha}) J_+(\beta_{s\alpha}), \\
 \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = \sum_{\alpha} \sum_s \frac{s\omega_{N\alpha}^2 k_{\perp}}{\omega\omega_{B\alpha} k_z} \frac{A_s(Z_{\alpha})}{Z_{\alpha}} [1 - J_+(\beta_{s\alpha})], \\
 \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = -i \sum_{\alpha} \sum_s \frac{\omega_{N\alpha}^2 k_{\perp}}{\omega\omega_{B\alpha} k_z} A'_s(Z_{\alpha}) [1 - J_+(\beta_{s\alpha})], \\
 \epsilon_{zz} &= 1 + \sum_{\alpha} \sum_s \frac{\omega_{N\alpha}^2 (\omega - s\omega_{B\alpha})}{\omega k_z^2 v_{T\alpha}^2} A_s(Z_{\alpha}) [1 - J_+(\beta_{s\alpha})].
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

*) При учете релятивистских эффектов (поперечный эффект Доплера) поглощение появляется также и при $k_z = 0$ (см. [1, 2]).

Здесь $A_s(Z_\alpha) = e^{-Z_\alpha} I_s(Z_\alpha)$, где $I_s(Z_\alpha)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $Z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2}$, $\beta_{s\alpha} = \frac{\omega - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}}$, а функция $J_+(x)$ была определена выше (см. § 5).

Если в формулах (7.6) перейти к пределу (ср. с (3.10))

$$Z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} \ll 1, \quad \beta_{s\alpha} = \frac{\omega - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \gg 1, \quad \frac{k_\perp v_{T\alpha}}{\omega} \ll 1, \quad (7.7)$$

получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^s = \varepsilon_{yy}^s = \varepsilon_{\perp}^s &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{xy}^s = -\varepsilon_{yx}^s = i g^s &= -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\varepsilon_{zz}^s = \varepsilon_{\parallel}^s = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2},$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0.$$

Тензор (7.8) совпадает с тензором (3.9), полученным для простейшей модели независимых частиц при $v_\alpha = 0$. Такой предельный случай будем также называть случаем бесстолкновительной «холодной» плазмы, так как он соответствует двухжидкостной гидродинамике холодной бесстолкновительной плазмы (3.25). Естественно, что формулы (7.8) могут быть получены в рамках такой квазигидродинамики.

Приведем также выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости бесстолкновительной магнитоактивной плазмы в пределе, соответствующем одножидкостной гидродинамике (3.36). В этом пределе (ср. с (3.38))

$$\omega \ll \omega_{Bi} \ll \omega_{Ni}, \quad \frac{k_\perp^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}^2} \ll 1, \quad v_{Ti} \ll \frac{\omega}{|k_z|} \ll v_{Te}. \quad (7.9)$$

Учитывая эти неравенства, из (7.6) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} + i\sqrt{2\pi} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}}{\omega |k_z|}, \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = i \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{k_{\perp}}{k_z} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Ne}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0, \\ v_A^2 &= c^2 \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{Ni}^2} = \frac{B_0^2}{4\pi N_i M}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Тензор (7.10) содержит, однако, несколько большую информацию, чем тензор, получаемый на базе линеаризованной системы уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики (3.36). Именно эти последние уравнения приводят к тензору, отличающемуся от (7.10) тем, что не содержат малых диссипативных слагаемых, обусловленных тепловым движением частиц. Это и понятно, поскольку уравнения (3.36) совершенно не учитывают бесстолкновительной диссипации, обусловленной черенковским и циклотронным поглощениями волн на частицах плазмы *). Выражения же (7.10) учитывают такую диссипацию, правда, обусловленную лишь поглощением волн электронами плазмы; поглощение волн ионами здесь не учитывается, поскольку оно в рассматриваемых условиях экспоненциально мало.

Не представляет труда учесть в формулах (7.8) и (7.10) также и столкновительную диссипацию (или, как говорят, тормозное поглощение волн). Так, в пределе

$$\omega \gg v_{\alpha}, \quad |\omega \pm \omega_{B\alpha}| \gg v_{\alpha} \quad (7.11)$$

для вычисления столкновительной поправки к тензору диэлектрической проницаемости можно воспользоваться

*) Заметим, что при выводе уравнений (3.36), вообще говоря, можно было учесть бесстолкновительную диссипацию (см. [2]). Однако при вычислении диссипативных членов пришлось бы ограничиться линейным приближением, что существенно снизило бы общность этих уравнений.

методом последовательных приближений, разлагая решение кинетического уравнения по «степеням интеграла столкновений» (так же, как это было сделано в § 5 для случая изотропной плазмы). В результате находим следующую поправку к функции (7.2), обусловленную столкновениями частиц *):

$$\begin{aligned} \delta f_{\alpha}^{(1)} = & \sum_s \frac{i}{\omega - k_z v_z - s\omega_{B\alpha}} \exp\left(-is\varphi + i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \sin \varphi\right) \times \\ & \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi' \exp\left(is\varphi' - i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \sin \varphi'\right) \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' I_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \times \\ & \times \left[\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} \delta f_{\beta}(\mathbf{p}') + \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial p_j} f_{0\beta}(\mathbf{p}') - f_{0\alpha}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_{\beta}}{\partial p_j} - \delta f_{\alpha}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_j} \right], \end{aligned} \quad (7.12)$$

где δf_{α} определяется выражением (7.2)

В случае полностью ионизованной «холодной» плазмы антиэрмитовская поправка к тензору (7.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^a = & i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega |k_z| v_{T\alpha}} \left[e^{-\frac{(\omega - \omega_{B\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_{B\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} \right] + \delta \varepsilon_{\perp}^a, \\ \varepsilon_{yy}^a = & \varepsilon_{xx}^a + i \sqrt{2\pi} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{|k_z| v_{T\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^a = & -\varepsilon_{yx}^a = ig^a = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega |k_z| v_{T\alpha}} \times \\ & \times \left[e^{-\frac{(\omega - \omega_{B\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} - e^{-\frac{(\omega + \omega_{B\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} \right] + \delta g^a, \\ \varepsilon_{zz}^a = & \varepsilon_{\parallel}^a = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 \omega}{|k_z|^3 v_{T\alpha}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2}} + \delta \varepsilon_{\parallel}^a. \end{aligned}$$

*) Используя интеграл столкновений Ландау, мы тем самым пренебрегаем влиянием магнитного поля на акт столкновений частиц, что, строго говоря, справедливо лишь при условии $\omega_{Ne} > \omega_{Be}$. Однако даже при нарушении этого неравенства неточность, связанная с использованием интеграла столкновений Ландау, невелика и обусловлена лишь изменением кулоновского логарифма (4.18); величина k_{\min} в этом случае определяется не дебаевским радиусом плазмы, а ларморовским радиусом электронов [24] $k_{\min} = \omega_{Be}/v_{Te}$.

Первые слагаемые в этих выражениях учитывают бесстолкновительное (экспоненциальное малое) поглощение волн частицами плазмы; вторые же слагаемые связаны со столкновениями частиц и равны

$$\delta \varepsilon_{\perp}^a = i \frac{\omega_{Ne}^2 v_{\text{эфф}} \omega}{\omega_{Be}^2} \left[\left(\frac{\omega_{Be}}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{Bi}}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right)^2 \right],$$

$$\delta g^a = -2 \frac{\omega_{Ne}^2 v_{\text{эфф}} \omega^2}{\omega_{Be}^2} \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{Bi}}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right) \times \quad (7.14) \\ \times \left(\frac{1}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right),$$

$$\delta \varepsilon_{\parallel}^a = i \frac{\omega_{Ne}^2 v_{\text{эфф}}}{\omega^3},$$

где $v_{\text{эфф}}$ определяется формулой (5.12). Суммирование в выражениях (7.13) распространяется по электронам и ионам плазмы, т. е. $\alpha = e, i$.

Отметим, что в случае «холодной» плазмы существенными оказываются лишь столкновения частиц различного сорта — электронов с ионами и ионов с электронами.

Иное положение имеет место в условиях применимости одножидкостной гидродинамики, когда выполнены неравенства (7.9). При этом оказывается, что столкновениями электронов можно пренебречь, если $v_e \ll |k_z| v_{Te}$, ω_{Be} , т. е. когда электроны «замагничены» и длина их свободного пробега больше длины волны.

Основным механизмом диссипации для электронной компоненты плазмы в этом случае является черенковское поглощение волн.

В области частот $\omega \gg v_i$ вклад в столкновительную диссипацию дают лишь ион-ионные столкновения, которые, так же как и выше, можно учесть методом последовательных приближений, разлагая решение кинетического уравнения по «степеням интеграла столкновений» для ионов. В результате получим следующую «столкновительную»

поправку к тензору (7.10):

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon_{xx} &= i \frac{7}{10} \frac{\omega_{Ni}^2 v_{ii} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}^4} + i \frac{\omega_{Ne}^2 v_{\text{эфф}}}{\omega \omega_{Be}^2}, \\
 \delta \varepsilon_{yy} &= i \frac{4}{5} \frac{\omega_{Ni}^2 v_{ii} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega^3 \omega_{Bi}^2}, \\
 \delta \varepsilon_{yz} &= -\delta \varepsilon_{zy} = -\frac{4}{5} \frac{\omega_{Ni}^2 v_{ii} k_{\perp} k_z v_{Ti}^2}{\omega^4 \omega_{Bi}}, \\
 \delta \varepsilon_{zz} &= i \frac{8}{5} \frac{\omega_{Ni}^2 v_{ii} k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^5}.
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Заметим, что отношение между ω и v_e при этом может быть произвольным.

В других областях частот и длин волн колебания полностью ионизованной магнитоактивной плазмы оказываются, вообще говоря, сильно затухающими. В частности, это имеет место при условии $v_e \gg \omega$, $v_e \gg |k_z| v_{Te}$ (исключение составляют циклотронные колебания, о которых речь пойдет особо в следующем параграфе). Поэтому мы не будем здесь выписывать других предельных выражений для тензора диэлектрической проницаемости полностью ионизованной магнитоактивной плазмы и перейдем к рассмотрению слабоионизованной плазмы.

Для слабоионизованной плазмы при использовании модельного интеграла столкновений Батнагара — Гросса — Крука удастся получить общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости без каких-либо ограничений по частоте и длине волн колебаний. Действительно, линейаризованное кинетическое уравнение для частиц α -го сорта в слабоионизованной магнитоактивной плазме записывается в виде (ср. с (5.20))

$$\begin{aligned}
 -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta f_{\alpha} + e_{\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \varphi} = \\
 = -v_{\alpha n} \{ \delta f_{\alpha} - \eta_{\alpha} f_{\alpha 0} \}. \tag{7.16}
 \end{aligned}$$

При написании этого уравнения мы воспользовались изотермической моделью интеграла столкновений БГК (см. [35]) и приняли зависимость от времени и координат для возмущенных величин в виде $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Общее решение уравнения (7.16), периодическое по φ , легко находится

и имеет вид (ср. с (7.2))

$$\begin{aligned} \delta f_{\alpha} &= \frac{1}{\omega_{B\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left(\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} - v_{\alpha n} \eta_{\alpha} f_{0\alpha} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i v_{\alpha n}) \right) = \\ &= \frac{i e_{\alpha}}{T_{\alpha}} f_{0\alpha} \sum_s \frac{1}{\omega + i v_{\alpha n} - k_z v_z - s \omega_{B\alpha}} \exp \left(-i s \varphi + i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \sin \varphi \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{s \omega_{B\alpha}}{k_{\perp}} I_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) E_x + i v_{\perp} I'_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) E_y + \right. \\ &\quad \left. + \left(v_z E_z + v_{\alpha n} \eta_{\alpha} \frac{T_{\alpha}}{e_{\alpha}} \right) I_s \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) \right\}. \quad (7.17) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для плотности тока (3.17), индуцированного в плазме, и используя соотношение (5.18), после несложных преобразований находим искомый тензор диэлектрической проницаемости для слабоионизованной магнитоактивной плазмы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \left(\delta_{i\mu} + i \frac{v_{\alpha n} G_{\alpha i} k_{\mu}}{\omega - i v_{\alpha n} G_{\alpha} k} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\omega + i v_{\alpha n}}{\omega} [\varepsilon_{\alpha \mu j}(\omega + i v_{\alpha n}, \mathbf{k}) - \delta_{\mu j}], \quad (7.18) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \begin{cases} \frac{\omega_{B\alpha}}{k_{\perp}} \sum_s \frac{s A_s(Z_{\alpha})}{\omega + i v_{\alpha n} - s \omega_{B\alpha}} J_+ \left(\frac{\omega + i v_{\alpha n} - s \omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) = G_{\alpha x}, \\ -i \frac{\omega_{B\alpha}}{k_{\perp}} \sum_s \frac{Z_{\alpha} A'_s(Z_{\alpha})}{\omega + i v_{\alpha n} - s \omega_{B\alpha}} J_+ \left(\frac{\omega + i v_{\alpha n} - s \omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) = G_{\alpha y}, \\ -\frac{1}{k_z} \sum_s A_s(Z_{\alpha}) \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega + i v_{\alpha n} - s \omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \right] = G_{\alpha z}, \end{cases} \quad (7.19)$$

а $\varepsilon_{\alpha ij}(\omega + i v_{\alpha n}, \mathbf{k})$ — тензор, по виду совпадающий с тензором (7.6) для частиц одного сорта, в котором, однако, произведена замена $\omega \rightarrow \omega + i v_{\alpha n}$. Суммирование в формуле (7.18) распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. Отметим еще раз, что эта формула справедлива для слабоионизованной плазмы при любых

соотношениях между ω , ω_{Ba} , ν_{an} , $k_{\perp}v_{T\alpha}$ и $k_z v_{T\alpha}$. В пределе холодной плазмы, когда выполнены условия (7.7), тензор (7.18) совпадает с тензором (3.8), (3.9), полученным для простейшей модели независимых частиц (при этом $\nu_{\alpha} = \nu_{an}$). В условиях же (7.9), когда справедлива одножидкостная гидродинамика для описания бесстолкновительной плазмы и, кроме того, $\nu_{en} \ll k_z/v_{Te}$, ω_{Be} из (7.18), получаем (ср. с (7.10) и (7.15))

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 - \frac{\omega_{Ni}^2 (\omega + i\nu_{in})}{\omega [(\omega + i\nu_{in})^2 - \omega_{Bi}^2]}, \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{xx} + i \sqrt{2\pi} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}}{\omega |k_z|}, \\ \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = i \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{k_{\perp}}{k_z} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right), \\ \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = -i \left\{ \frac{\omega_{Ni}^2 \omega_{Bi}}{\omega [(\omega + i\nu_{in})^2 - \omega_{Bi}^2]} + \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega \omega_{Be}} \right\}, \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega (\omega + i\nu_{in})} + \frac{\omega_{Ne}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right). \end{aligned} \quad (7.20)$$

В заключение приведем выражения для «продольной диэлектрической проницаемости» магнитоактивной плазмы, которую мы определим следующим образом:

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}). \quad (7.21)$$

Согласно (4.13) именно эта величина характеризует потенциал поля, создаваемого зарядом в плазме.

Для бесстолкновительной плазмы из формул (7.6) получаем

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\omega_{B\alpha}} A_s(Z_{\alpha}) J_+(\beta_{s\alpha}) \right\}. \quad (7.22)$$

Приведем также выражение для «продольной диэлектрической проницаемости» слабоионизованной плазмы с

учетом столкновений. Из формулы (7.18) имеем

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \times$$

$$1 - \sum_s \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - s\omega_{B\alpha}} A_s(Z_{\alpha}) J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right)$$

$$\times \frac{1 - \sum_s \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - s\omega_{B\alpha}} A_s(Z_{\alpha}) J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right)}{1 - \sum_s \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - s\omega_{B\alpha}} A_s(Z_{\alpha}) J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right)}$$
(7.23)

В пределе $B_0 \rightarrow 0$, т. е. в отсутствие внешнего магнитного поля, формулы (7.22) и (7.23) переходят в соответствующие формулы для продольной диэлектрической проницаемости изотропной плазмы (см. § 5).

В статическом пределе (точнее, когда $\omega \ll |k_z| v_{T\alpha}$, $\omega v_{\alpha} \ll k_z^2 v_{T\alpha}^2$) выражения (7.22) и (7.23) имеют одинаковый вид

$$\varepsilon(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \quad (7.24)$$

в точности совпадающий с (5.22). Отсюда следует вывод, что в магнитоактивной плазме, так же как и в изотропной плазме без внешних полей, потенциал статического заряда является дебаевским потенциалом (5.26). Можно показать, что этот вывод остается в силе и для полностью ионизованной плазмы со столкновениями. Таким образом, обрезание кулоновского взаимодействия частиц на дебаевском радиусе, использованное при выводе интеграла столкновений Ландау (см. § 4), является обоснованным также и для магнитоактивной плазмы.

§ 8. ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Число различных ветвей колебаний $\omega_n(\mathbf{k})$ магнитоактивной плазмы, как уже отмечалось выше, очень велико, и в настоящей монографии вряд ли возможно дать подробный анализ всех ветвей колебаний. Поэтому мы ограничимся исследованием лишь наиболее характерных особенностей распространения волн в магнитоактивной плазме (подробнее см. [1—7], а также [12, 44]).

В магнитоактивной плазме электромагнитные волны, вообще говоря, не распадаются на чисто продольные и чисто поперечные, и приходится анализировать общее дисперсионное уравнение (2.13), которое при учете симметрии тензора диэлектрической проницаемости плазмы (см. § 7) записывается в виде

$$Ak^4 + B \frac{\omega^2}{c^2} k^2 + C \frac{\omega^4}{c^4} = 0, \quad (8.1)$$

где

$$A = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \varepsilon_{xx} + \frac{k_z^2}{k^2} \varepsilon_{zz} + 2 \frac{k_{\perp} k_z}{k^2} \varepsilon_{xz},$$

$$B = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{i\mu}(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon_{\mu j}(\omega, \mathbf{k}) - A \operatorname{Sp} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) =$$

$$= -\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xz}^2 - \frac{k_z^2}{k^2} (\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz}^2) -$$

$$- \frac{k_{\perp}^2}{k^2} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2) + 2 \frac{k_{\perp} k_z}{k^2} (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zy}),$$

$$C = \det |\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})| =$$

$$= \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz}^2 + 2 \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy}.$$

Легко видеть, что A совпадает с «продольной диэлектрической проницаемостью» $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$.

В каждом конкретном случае можно указать условия, при которых поле волны в плазме с большой степенью точности является продольным, т. е. когда продольная составляющая электрического поля $\mathbf{E}^l = \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{E}) / k^2$ значительно больше поперечной составляющей $\mathbf{E}^{tr} = [\mathbf{k} [\mathbf{E} \mathbf{k}]] / k^2$. Действительно, умножая уравнение (2.12) скалярно на \mathbf{k} , получим

$$\mathbf{E}^l = -\mathbf{k} \frac{k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j^{tr}}{k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}. \quad (8.3)$$

Отсюда видно, что при условии

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (8.4)$$

электрическое поле волны является продольным, или, как говорят, потенциальным. В продольной волне $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$, где Φ — потенциал электрического поля, а поэтому $\mathbf{B} = \mathbf{E}^{tr} = 0$. Отсюда следует, что в продольной

волне $D = 0$ и такие волны могут существовать лишь при условии $|\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})| = 0$. Это условие, однако, нельзя рассматривать как дисперсионное уравнение для продольных волн, так как оно может выполняться и для волн, которые нельзя считать продольными. Дисперсионным уравнением для продольных волн в плазме является уравнение (8.4). Заметим, однако, что продольные волны, строго говоря, не являются собственными волнами для произвольной анизотропной среды. Поэтому уравнение (8.4) может описывать собственные колебания среды лишь приближенно, при выполнении определенных условий, которые определяются из требования, чтобы корни этого уравнения приближенно совпадали с корнями точного дисперсионного уравнения (8.1) *). Легко видеть, что это возможно в области частот $\omega^2 \ll k^2 c^2$ (т. е. когда велики показатели преломления и малы фазовые скорости волн), в которой двумя последними членами в левой части уравнения (8.1) можно пренебречь по сравнению с первым членом. Ниже, в конкретных случаях, условия продольности (потенциальности) поля будут уточнены (подробную классификацию различного типа продольных волн в анизотропных средах см. в [9]).

а) Электромагнитные волны в холодной магнитоактивной плазме. Исследование распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме начнем с наиболее простого случая холодной бесстолкновительной плазмы, для которой справедливы выражения (7.8). В этом случае

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_{\perp}^{\partial} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel}^{\partial} \cos^2 \theta, \\ B &= -\varepsilon_{\perp}^{\partial} \varepsilon_{\parallel}^{\partial} (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_{\perp}^{\partial 2} - g^{\partial 2}) \sin^2 \theta, \\ C &= \varepsilon_{\parallel}^{\partial} (\varepsilon_{\perp}^{\partial 2} - g^{\partial 2}), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где θ — угол между направлением распространения волны и вектором магнитного поля (т. е. $k_{\perp} = k \sin \theta$ и $k_z = k \cos \theta$). Используя эти выражения, из дисперсионного уравнения (8.1) можно найти комплексные показатели преломления $n = \frac{c}{\omega} k = \mu + i\kappa$ электромагнитных волн

*) При определенных направлениях распространения волны корни уравнения (8.4) совпадают с корнями уравнения (8.1) и тогда поле в плазме является строго продольным.

в холодной плазме как функции частоты ω и угла θ :

$$n_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (8.6)$$

Отсюда видно, что в холодной плазме при заданных ω и θ могут распространяться, вообще говоря, два типа волн с разными показателями преломления, а следовательно, и с разными фазовыми скоростями. Эти волны принято называть обыкновенной и необыкновенной волнами. В общем случае они эллиптически поляризованы, причем

$$\frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}} = -i \frac{g^{\theta}}{n_{1,2}^2 - \varepsilon_{\perp}^{\theta}}, \quad (8.7)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум различным волнам.

Формулы (8.6) принимают особо простой вид для волн, распространяющихся вдоль ($\theta = 0$) и поперек ($\theta = \pi/2$) внешнего магнитного поля.

При $\theta = \pi/2$ (поперечное распространение) имеем

$$n_1^2 = \varepsilon_{\parallel}^{\theta}, \quad n_2^2 = \frac{\varepsilon_{\perp}^{\theta} - g^{\theta 2}}{\varepsilon_{\perp}^{\theta}}. \quad (8.8)$$

В случае же $\theta = 0$ (продольное распространение)

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon_{\perp}^{\theta} \pm g^{\theta}. \quad (8.9)$$

В этом последнем случае уравнение (8.1) также удовлетворяется, если

$$\varepsilon_{\parallel}^{\theta} = 0, \quad (8.10)$$

что соответствует продольным волнам в холодной плазме ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$). Уравнения же (8.9) описывают поперечные электромагнитные волны $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, распространяющиеся вдоль магнитного поля, которые при этом оказываются поляризованными по кругу:

$$\frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}} = \mp i. \quad (8.11)$$

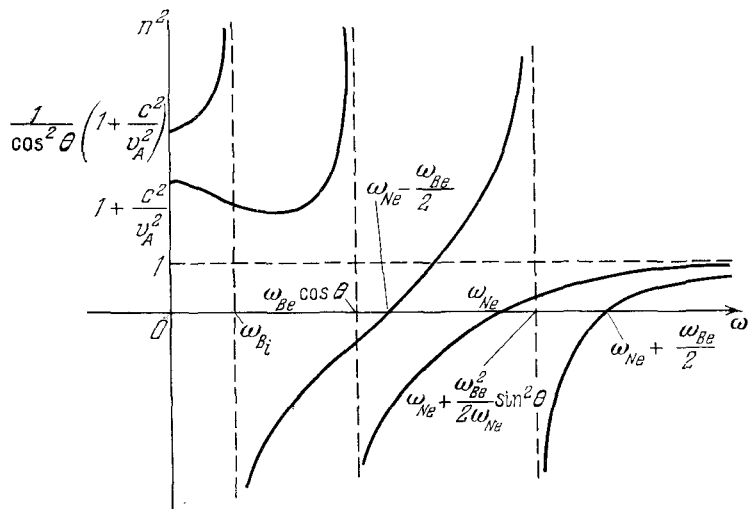
Заметим, что волны, распространяющиеся поперек магнитного поля, в отличие от распространяющихся вдоль поля, не распадаются на чисто продольные и чисто поперечные волны. Так, обыкновенная волна (n_1^2) является поперечной (в ней $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$), а необыкновенная (n_2^2) имеет как

продольную, так и поперечную компоненты электрического поля.

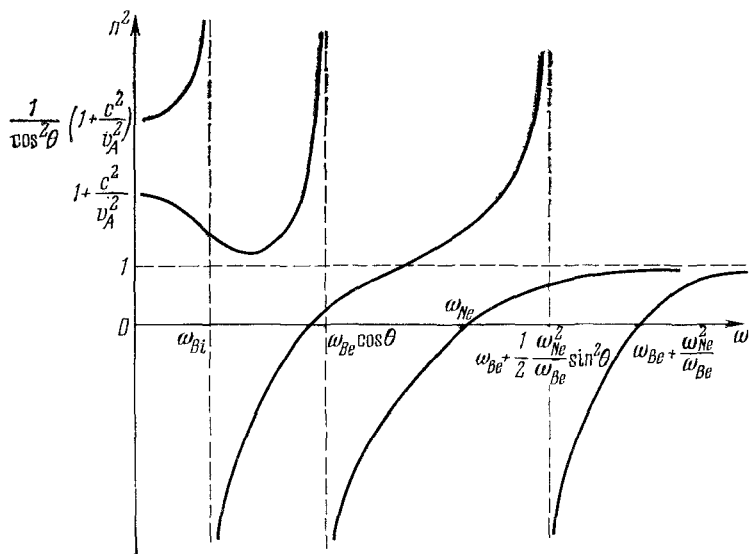
На рис. 4 схематически показан ход квадратов комплексных показателей преломления (которые всегда вещественны) обыкновенной и необыкновенной волн в бесстолкновительной холодной магнитоактивной плазме в зависимости от частоты ω и при $\theta \neq 0, \pi/2$. Для определенности на рис. 4, а принято, что $\omega_{Ne} \gg \omega_{Be}$, а на рис. 4, б отражен случай, когда $\omega_{Be} \gg \omega_{Ne}$ (более подробно см. [1, 3], а также обзор В. Д. Шафранова в сборнике [7], т. 3). Области частот, в которых $n^2(\omega) < 0$, соответствуют областям непрозрачности плазмы по отношению к данной волне. При этом величина $|n|$ определяет глубину проникновения электромагнитной волны данной частоты в плазму $\delta \approx \frac{c}{\omega |n|}$ (граничная задача). Области же частот, в которых $n^2(\omega) > 0$, соответствуют областям прозрачности плазмы. Последние могут быть сопоставлены собственным колебаниям плазмы $\omega_j(k)$ (начальная задача), где $k = \frac{\omega}{c} n$ — вещественное число, а индекс $j = 1, 2, 3, \dots$ служит для обозначения различных ветвей колебаний. Рассматривая лишь верхнюю полуплоскость на рис. 4, видим, что в холодной плазме с одним сортом ионов имеются пять ветвей колебаний. Все эти колебания, очевидно, являются незатухающими, так как в рассматриваемом приближении совершенно не учитываются диссипативные эффекты в плазме. По этой же причине непроникновение поля в плазму (этому отвечает нижняя полуплоскость на рис. 4) связано с полным внутренним отражением поля от плазмы.

Выразить ω аналитически в виде функции k даже в случае холодной плазмы, вообще говоря, весьма трудно. Графически, однако, эту зависимость легко представить с помощью рис. 4. Таким путем особенно просто убедиться в том, что в холодной магнитоактивной плазме существуют пять ветвей собственных колебаний (колебания, для которых $n^2(\omega) > 0$). Найти аналитическую зависимость $\omega(k)$ удастся лишь в случае низких и высоких частот колебаний.

Прежде чем перейти к обсуждению формул для спектров низкочастотных колебаний, рассмотрим волны в холодной магнитоактивной плазме в условиях, когда $A = \varepsilon(\omega, k) \rightarrow 0$, а показатели преломления неограниченно



а)



б)

Рис. 4. Функция $n^2(\omega)$ для холодной магнитоактивной плазмы:
 а) $\omega_{Ne} \gg \omega_{Be}$, б) $\omega_{Be} \gg \omega_{Ne}$.

возрастают. При этом

$$n_1^2 = -\frac{C}{B}, \quad n_2^2 = -\frac{B}{A}. \quad (8.12)$$

Поскольку $A = 0$, то только $n_2^2 \rightarrow \infty$, а n_1^2 остается конечным.

Согласно (8.4) равенство $A = 0$ является условием продольности колебаний, поэтому в холодной плазме волны с бесконечно большим показателем преломления являются продольными *). Для холодной плазмы условие продольности колебаний записывается в виде

$$1 - \left(\frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \right) \cos^2 \theta - \left(\frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right) \sin^2 \theta = 0. \quad (8.13)$$

Это уравнение определяет частоты $\omega = \omega_j(\theta)$ трех ($j = 1, 2, 3$) собственных продольных колебаний холодной магнитоактивной плазмы:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{Ne}^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}, \quad (8.14)$$

$$\omega_3^2 = \omega_{Bi}^2 \left(1 - Z \frac{m}{M} \tan^2 \theta \right),$$

где $Z = |e_i/e|$. Заметим, что формулы (8.14) для $\omega_2(\theta)$ и $\omega_3(\theta)$ становятся непригодными для углов θ , близких к $\pi/2$, когда $\cos^2 \theta \ll m/M$. В этом случае вместо (8.14) следует пользоваться формулами

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{Be}^2 (\omega_{Ni}^2 + \omega_{Bi}^2)}{\omega_{Be}^2 + \omega_{Ne}^2}, \quad \omega_3^2 = \frac{\omega_{Bi}^2 \omega_{Ne}^2 \cos^2 \theta}{\omega_{Be}^2 + \omega_{Ne}^2}. \quad (8.15)$$

Зависимость частот $\omega_j(\theta)$ от угла θ для ионосферной плазмы (в которой $\omega_{Ne} > \omega_{Be}$) схематически показана на рис. 5. Колебания с частотой ω_3 существуют лишь в очень узком интервале углов около $\theta = \pi/2$, где $\omega_3 \ll \omega_{Bi}$. В остальной же области углов эти колебания сильно затухают из-за циклотронного поглощения волн ионами плазмы (см., например, [3]).

*) Исключение составляют волны, распространяющиеся строго вдоль магнитного поля ($\theta = 0$). В этом случае продольные волны являются собственными волнами в магнитоактивной плазме при любом значении n^2 .

Выше отмечалось, что в предельных случаях высоких и низких частот колебаний удается аналитически определить спектры $\omega(k)$ для произвольных (непотенциальных) волн. В области частот $\omega \gg \omega_{Be}$ магнитное поле не играет никакой роли, и эти спектры, очевидно, совпадают со спектрами для изотропной немагнитоактивной плазмы,

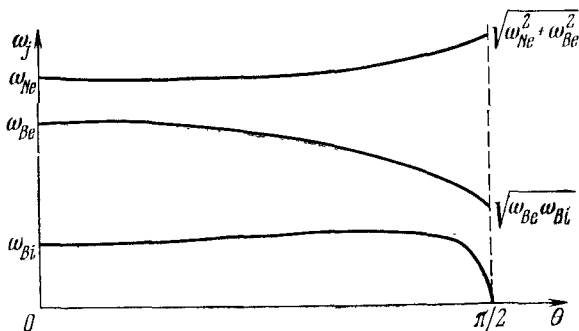


Рис. 5. Зависимость $\omega_j(\theta)$ для продольных волн в холодной магнитоактивной плазме.

исследованными в § 6. В противоположном пределе самых низких частот $\omega \ll \omega_{Bi} \ll \omega_{Ne}$ (и при θ , не очень близких к $\pi/2$, так что $\cos^2 \theta \gtrsim m/M$) дисперсионное уравнение (8.1) для холодной плазмы в пренебрежении диссипативными процессами приводит к следующим спектрам колебаний:

$$\omega_1^2 = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{1 + v_A^2/c^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}. \quad (8.16)$$

При $v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi N_i M} \ll c^2$ (это неравенство хорошо выполняется в большинстве реальных случаев, в частности, в ионосферной плазме) выражения (8.16) совпадают с известными выражениями для спектра альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в обычной магнитной гидродинамике идеально проводящей жидкости (см. уравнения (3.11) и (3.12)).

Выражения (8.16) получены для случая холодной плазмы и согласно неравенствам (7.7), вообще говоря, справедливы в условиях, когда фазовые скорости волн

больше тепловых скоростей как ионов, так и электронов, т. е. $\omega/k \sim v_A \gg v_{Te}$, что соответствует $\beta = \frac{8\pi NT}{B_0^2} \ll \frac{m}{M}$

(заметим, кстати, что это условие хорошо выполняется в ионосфере, а также в высокотемпературной плазме, удерживаемой сильным магнитным полем в лабораторных установках управляемого термоядерного синтеза). В действительности, однако, выражения (8.16) оказываются справедливыми и в более общем случае; именно фазовые скорости волн могут быть и меньше тепловых скоростей электронов, лишь бы они были больше скорости звука v_s и тепловой скорости ионов v_{Ti} , т. е. достаточно, чтобы $\beta \ll 1$ (см. ниже).

Не представляет труда записать также и выражения для показателей преломления рассматриваемых волн. Используя соотношение $k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} (\mu + i\kappa)$, из (8.16) находим (см. также рис. 4)

$$n_1^2 = \mu_1^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right), \quad n_2^2 = \mu_2^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}. \quad (8.17)$$

Отсюда видим, что в рассматриваемом приближении частотная дисперсия показателей преломления этих волн отсутствует.

В случае холодной плазмы удается получить аналитическое выражение для спектра еще одной ветви колебаний, лежащей в промежуточной области частот $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$. В отличие от низкочастотных волн (8.16) эти колебания являются чисто электронными и могут распространяться в плазме с достаточно высокой плотностью, когда $\omega_{Ne}^2 \gg \omega \omega_{Be}$ (и при углах θ , не очень близких к $\pi/2$). Из уравнения (8.1), используя выражения (8.5), легко показать, что спектр таких волн имеет вид

$$\omega_3 = \left| \omega_{Be} \cos \theta \right| \frac{k^2 c^2}{\omega_{Ne}^2}. \quad (8.18)$$

Эти волны получили название свистящих атмосфериков; их называют также спиральными волнами, подчеркивая тем самым их круговую поляризацию*). Спиральные волны, так же как и рассмотренные выше альвеновские и быстрые магнитозвуковые волны, могут существовать не

*) В твердых телах такие волны называют геликонами.

только в холодной плазме (т. е. в условиях, когда их фазовая скорость больше тепловой скорости электронов), но также и при $\omega \lesssim k_z v_{Te}$. При этом, однако, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\omega \gg k_z v_{Ti}$; в противном случае колебания становятся сильно затухающими (см. ниже). Показатель преломления спиральных волн в рассматриваемом приближении (т. е. в пренебрежении всеми диссипативными процессами в плазме) определяется выражением

$$n_3^2 = \mu_3^2 = \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega |\omega_{Be} \cos \theta|}. \quad (8.19)$$

Из рис. 4 можно видеть, что спиральные волны, по существу, представляют собой продолжение ветви быстрой магнитозвуковой волны из области низких частот $\omega \ll \omega_{Bi}$ в область промежуточных $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$.

Перейдем теперь к учету диссипативных эффектов и исследуем поглощение электромагнитных волн в холодной плазме. В нулевом приближении по малым параметрам (7.7), когда плазму можно считать в полном смысле холодной, существенна лишь столкновительная диссипация волн. Наряду со столкновительным поглощением мы учтем также тепловые эффекты, содержащиеся в членах первого порядка по параметрам (7.7) и приводящие к бесстолкновительному магнитотормозному и черенковскому поглощению волн в плазме. Оба указанных механизма поглощения волн учтены в антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости плазмы (7.13) и (7.14), которая является малой по сравнению с эрмитовской частью *) (7.8). Поэтому при использовании формулы (8.6) для $n_{1,2}^2 = (\mu_{1,2} + i\kappa_{1,2})^2$ изменением показателей преломления волн μ можно пренебречь, коэффициенты же поглощения волн κ при этом оказываются линейными функциями антиэрмитовской части тензора $\epsilon_{ij}(\omega, k)$, т. е.

$$\kappa_{1,2} = \frac{i}{2\mu_{1,2}} \frac{\mu_{1,2}^4 \delta A + \mu_{1,2}^2 \delta B + \delta C}{2\mu_{1,2}^2 A + B}, \quad (8.20)$$

*) Тепловых поправок к эрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости мы здесь ради простоты изложения не учитываем. Они становятся существенными вблизи резонансных частот, где $\mu^2 \rightarrow \infty$. Их роль при этом сводится к устранению расходимости μ^2 . К такому же эффекту приводит учет столкновений. С этими вопросами читатель может познакомиться в монографиях [1, 3, 4].

где величины $\mu_{1,2}^2$, A , B и C определяются формулами (8.5) и (8.6), а

$$\delta A = \epsilon_{xx}^a \sin^2 \theta + \epsilon_{zz}^a \cos^2 \theta,$$

$$\begin{aligned} \delta B = & -(\epsilon_{xx}^a \epsilon_{\parallel}^{\beta} + \epsilon_{zz}^a \epsilon_{\perp}^{\beta})(1 + \cos^2 \theta) - \\ & - 2 \sin^2 \theta (\epsilon_{xx}^a \epsilon_{\perp}^{\beta} - g^a g^{\beta}) - \epsilon_{\parallel}^{\beta} (\epsilon_{yy}^a - \epsilon_{xx}^a) \cos^2 \theta - \\ & - \epsilon_{\perp}^{\beta} (\epsilon_{yy}^a - \epsilon_{xx}^a) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\delta C = \epsilon_{zz}^a (\epsilon_{\perp}^{\beta 2} - g^{\beta 2}) + 2\epsilon_{\parallel}^{\beta} (\epsilon_{xx}^a \epsilon_{\perp}^{\beta} - g^a g^{\beta}) + \epsilon_{\parallel}^{\beta} \epsilon_{\perp}^{\beta} (\epsilon_{yy}^a - \epsilon_{xx}^a).$$

Компоненты ϵ_{ij}^a в этих выражениях определены формулами (7.13) и (7.14). Заметим, что формулы (8.20) и (8.21) пригодны также и для слабоионизованной холодной плазмы в условиях, когда выполнены неравенства (7.11). В выражениях (7.14) при этом под ν_{α} следует понимать $\nu_{\alpha n}$. Если неравенства (7.11) не выполнены, то антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости (3.8) и (3.9) (выше было показано, что в пределе холодной плазмы именно выражения (3.8) и (3.9) определяют диэлектрическую проницаемость слабоионизованной плазмы) уже не является малой по сравнению с эрмитовской частью, и электромагнитные волны, вообще говоря, оказываются сильно затухающими.

Остановимся более подробно на поглощении волн в тех случаях, когда удастся найти аналитическое выражение для спектра $\omega(k)$. Рассмотрение начнем с продольных колебаний магнитоактивной плазмы, частоты которых в отсутствие поглощения выражаются формулами (8.14) и (8.15). При учете диссипативных процессов к указанным частотам появляются мнимые поправки γ , определяющие временной декремент затухания продольных колебаний (т. е. $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$):

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}(\theta) = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{1,2}^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{Ne}^2 \omega_{1,2}^2}{(\omega_{1,2}^2 - \omega_{Be}^2)^2} \sin^2 \theta \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{1,2}^2} \nu_e + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2 \omega_{1,2}^2}{k^3 v_{Te}^3 |\cos^3 \theta|} \exp\left(-\frac{\omega_{1,2}^2}{2k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta}\right) \right] \cos^2 \theta + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\omega_{Ne}^2 (\omega_{1,2}^2 + \omega_{Be}^2)}{(\omega_{1,2}^2 - \omega_{Be}^2)^2} \nu_e + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}^2}{k v_{Te} |\cos \theta|} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\exp\left\{-\frac{(\omega_{1,2} - \omega_{Be})^2}{2k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta}\right\} + \exp\left\{-\frac{(\omega_{1,2} + \omega_{Be})^2}{2k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta}\right\} \right) \right] \sin^2 \theta \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3(\theta) = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_3^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{Ni}^2 \omega_3^2}{(\omega_3^2 - \omega_{Bi}^2)^2} \sin^2 \theta \right\}^{-1} \times \\
& \times \left\{ \frac{\omega_{Ni}^2 (\omega_3^2 + \omega_{Bi}^2)}{(\omega_3^2 - \omega_{Bi}^2)^2} v_i + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ni}^2}{k v_{Ti} |\cos \theta|} \right\} \times \\
& \times \left(\exp \left\{ -\frac{(\omega_3 - \omega_{Bi})^2}{2k^2 v_{Ti}^2 \cos^2 \theta} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\omega_3 + \omega_{Bi})^2}{2k^2 v_{Ti}^2 \cos^2 \theta} \right\} \right) \sin^2 \theta + \\
& + \left[\frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_3^2} v_e + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2 \omega_3^2}{k^3 v_{Te}^3 |\cos^3 \theta|} \exp \left\{ -\frac{\omega_3^2}{2k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta} \right\} \right] \cos^2 \theta.
\end{aligned} \quad (8.22)$$

Формулы (8.22) для γ_2 и γ_3 , так же как и (8.14) для ω_2 и ω_3 , становятся непригодными при $\theta \approx \pi/2$, когда $\cos^2 \theta \ll m/M$. Для таких углов вместо (8.22) следует пользоваться формулами

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2} \frac{\omega_2^2}{\omega_{Ni}^2} \left\{ \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_2^2} v_e \cos^2 \theta + \left(\frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{Be}^2} v_e + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} v_i \right) \sin^2 \theta \right\}, \quad (8.23)$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{2} \frac{\omega_3^2}{\omega_{Ne}^2 \cos^2 \theta} \left\{ \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_3^2} v_e \cos^2 \theta + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} v_i \sin^2 \theta \right\},$$

где ω_2 и ω_3 определяются выражениями (8.15).

При получении формул (8.23) мы пренебрегли бесстолкновительным поглощением волн, так как в рассматриваемой области углов в реальных случаях оно всегда мало по сравнению со столкновительным поглощением. Заметим также, что для полностью ионизованной плазмы в формулах (8.22) и (8.23) следует полагать $v_e = v_{эфф}$, $v_i = \frac{m}{M} v_{эфф}$, а для слабоионизованной $v_e = v_{en}$, $v_i = v_{in}$.

Не представляет труда найти также выражения для декрементов затухания γ альвеновской и магнитозвуковой волн в холодной плазме, частоты которых определяются формулами (8.16) (относительно спиральной волны см.

ниже). Для этих волн соответственно имеем

$$\frac{\gamma_1}{|\omega_1|} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{Ni}^2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 \omega_1^2 \nu_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}^4 |\omega_1|} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} \frac{\omega_1^6 \operatorname{tg}^2 \theta}{\omega_{Bi}^2 |k_z^3| v_{Te}^3} \frac{1}{|\omega_1|} e^{-\frac{\omega_1^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}, \quad (8.24)$$

$$\frac{\gamma_2}{|\omega_2|} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{Ni}^2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 \omega_2^2 \nu_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}^4 |\omega_2|} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} \frac{v_{Te}}{v_A} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} e^{-\frac{\omega_2^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}}.$$

Здесь мы пренебрегли бесстолкновительным магнитотормозным (циклотронным) поглощением волн: при $\theta \neq 0$ оно мало по сравнению с электронным черенковским поглощением, не говоря уже о том, что практически во всех реальных случаях им можно пренебречь по сравнению со столкновительным поглощением волн, учитываемым первыми слагаемыми в выражениях (8.24). Формулы (8.24), так же как и (8.22) и (8.23), пригодны как для полностью ионизованной плазмы, так и для слабоионизованной; при этом, однако, следует учитывать сделанное выше замечание относительно ν_{α} .

б) Электромагнитные волны в плазме с горячими электронами. До сих пор мы рассматривали холодную плазму, когда выполнены условия (7.7) и, следовательно, фазовые скорости волн больше тепловых скоростей электронов и ионов. Этими условиями, собственно, и было предопределено экспоненциально слабое бесстолкновительное поглощение исследованных выше волн в плазме. Оказывается, что слабозатухающими являются также волны в области промежуточных частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$. Если, кроме того, выполнены и другие неравенства (7.9), то для описания колебаний плазмы применимы выражения (7.10), (7.15) и (7.20) (в случае слабоионизованной плазмы). Этот предел, как уже неоднократно отмечалось выше, соответствует области одножидкостной гидродинамики плазмы (3.36). Дисперсионное уравнение (8.1) при

этих ограничениях распадается на два уравнения:

$$k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xx} = 0, \quad (8.25)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yy}\right) \epsilon_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yz}^2 = 0.$$

Первое из уравнений (8.25) описывает альвеновские колебания магнитоактивной плазмы со спектром

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta, \quad \gamma = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} v_e + v_i \right). \quad (8.26)$$

В случае полностью ионизованной плазмы здесь следует полагать $v_e = v_{эфф}$, $v_i = \frac{m}{M} v_{эфф} + \frac{7}{10} v_{ii} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}^2}$, а в случае слабоионизованной — $v_e = v_{en}$ и $v_i = v_{in}$. Спектр (8.26) является продолжением спектра альвеновских колебаний холодной плазмы (8.16) и (8.24) в область более низких фазовых скоростей, когда $\omega \ll k_z v_{Te}$. Поэтому такие альвеновские волны возможны в плазме, в которой $v_{Te} \gg v_A$, или, что то же самое, $\beta = 8\pi N T_e / B_0^2 \gg m/M$. Заметим также, что альвеновские волны могут существовать как при $\omega \gg v_e$, так и при $\omega \ll v_e$; для того чтобы они были слабозатухающими, достаточно выполнения неравенств $\omega \gg v_i$, $\omega_{Be} \gg v_e$. Это замечание относится как к медленным (описываемым формулами (8.26)), так и к быстрым (описываемым формулами (8.16) и (8.24)) альвеновским волнам.

Из второго уравнения (8.25) находим спектры быстрой и медленной магнитозвуковых волн:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} k^2 \{v_A^2 + v_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta}\}, \quad (8.27)$$

$$\gamma_{\pm} = -\frac{1}{2} \frac{kv_s}{|\cos \theta|} \sqrt{\frac{\pi}{8} Z \frac{m}{M}} \times \left\{ 1 \pm \frac{\cos 2\theta \left[\frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\theta - 1 \right]}{\sqrt{1 + \frac{v_s^4}{v_A^4} - 2 \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\theta}} \right\} + \delta\gamma_{\pm},$$

где $\delta\gamma_{\pm}$ — столкновительная поправка в декременте

затухания волн, равная соответственно

$$\delta\gamma_{\pm} = -\frac{4}{5} v_{ii} \frac{v_{Ti}^2}{v_s^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{9}{8} \frac{v_s^2}{v_A^2} \sin^2 \theta \mp \right. \\ \left. \mp \frac{1}{8} \sqrt{1 + \frac{v_s^4}{v_A^4} - 2 \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\theta} \left[\left(1 - \frac{v_s^2}{v_A^2} \cos 2\theta \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(4 + 3 \frac{v_s^2}{v_A^2} \sin^2 \theta \right) + 2 \sin^2 \theta \left(2 + 3 \frac{v_s^2}{v_A^2} (1 + \cos^2 \theta) \right) \right] \right\} \quad (8.28)$$

в случае полностью ионизованной плазмы и

$$\delta\gamma_{\pm} = -\frac{v_{in}}{2} \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta}{\omega_{\pm}^4 - k^4 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta} \left[(\omega_{\pm}^2 - k^2 v_A^2) + \right. \\ \left. + \omega_{\pm}^2 \left(\frac{\omega_{\pm}^2}{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta} - 1 \right) \right] \quad (8.29)$$

для слабоионизованной плазмы.

Особенно простой вид принимает спектр магнитозвуковых колебаний (8.27) — (8.29) в случае плазмы низкого давления, в которой $\beta = \frac{8\pi N (T_e + T_i)}{B_0^2} \ll 1$ или, что то же

самое, $v_A^2 \gg v_s^2 + v_{Ti}^2$. При этом быстрая магнитозвуковая волна становится чисто поперечной, причем спектр ее совпадает по виду со спектром (8.16) и (8.24) (см. выражения для ω_2 и γ_2 ; экспонента в формуле (8.24) в рассматриваемой области частот равна единице). Это означает, что спектр магнитозвуковых колебаний холодной плазмы ($\omega \gg k_z v_{Te}$) без изменения продолжается в область более низких частот $\omega \lesssim k_z v_{Te}$. В этой области частот, однако, они могут существовать, если только $\beta > m/M$.

Для медленной магнитозвуковой волны при $\beta \ll 1$ получаем

$$\omega_{\pm}^2 = k^2 v_s^2 \cos^2 \theta, \quad \gamma_{\pm} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} Z \frac{m}{M} |\omega_{\pm}| - \frac{v_i}{2}, \quad (8.30)$$

где $v_i = \frac{8}{5} v_{ii} \frac{T_i}{Z T_e}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_i = v_{in}$ для слабоионизованной.

Колебания, описываемые формулами (8.30), с точностью до $\beta \ll 1$ являются продольными. Они представляют

собой продолжение ионно-звуковых колебаний на случай магнитоактивной плазмы и, так же как и звуковые колебания, существуют как слабозатухающие лишь в неизотермической плазме, в которой $T_e > 6T_i$. Это неравенство следует из условия пренебрежения черенковским поглощением волн ионами плазмы в области частот $\omega \gg k_z v_{Ti}$. Заметим, что именно благодаря сильному черенковскому поглощению волн ионами в области частот $\omega \lesssim k_z v_{Ti}$ любые колебания магнитоактивной плазмы оказываются сильно затухающими.

Наконец, отметим, что все полученные выше результаты о спектрах колебаний плазмы в области промежуточных частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ остаются справедливыми при любых соотношениях между ω и v_e ; необходимо только выполнение неравенств $\omega \gg v_i$, $v_e \ll k_z v_{Te}$.

Уже из того факта, что ионно-звуковые колебания существуют в изотропной плазме без внешних полей, можно предположить, что колебания со спектром (8.30) могут существовать как слабозатухающие также и в области высоких частот, когда $\omega \gtrsim \omega_{Bi}$. В этом проще всего убедиться, исходя из дисперсионного уравнения для продольных колебаний магнитоактивной плазмы (8.4). В пределе очень высоких частот, когда $\omega \gg \omega_{Be}$, влиянием магнитного поля, очевидно, можно пренебречь. При этом уравнение (8.4) совпадает с дисперсионным уравнением для продольных волн изотропной немагнитоактивной плазмы, исследованным в § 6.

В области более низких частот, $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ (или более сильных магнитных полей), и при условиях $\omega \gg v_i$, $k_z v_{Ti}$; ω , $v_e \ll k_z v_{Te}$ влиянием магнитного поля на ионную компоненту плазмы все еще можно пренебречь, в то время как на электронную компоненту оно оказывает сильное влияние. Из уравнения (8.4) при этом получаем следующий спектр продольных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_s^2}{1 + k^2 r_{De}^2}, \quad \gamma = -\frac{v_i}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{m} \frac{1}{Z} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3 |\cos \theta|}, \quad (8.31)$$

где $v_i = \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_i = v_{in}$ для слабоионизованной.

Наконец, в области еще более низких частот, $\omega \ll \omega_{Bi}$, и при условиях, указанных выше при выводе

формулу (8.30), получаем

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta}{1 + k^2 r_{De}^2}, \quad \gamma = -\frac{v_i}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{M}{Zm} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3 |\cos^3 \theta|}}. \quad (8.32)$$

Здесь уже $v_i = \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_i = v_{in}$ для слабоионизованной. В пределе $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ спектр (8.32) переходит в гидродинамический

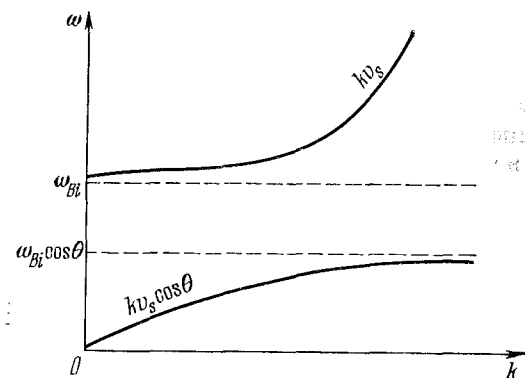


Рис. 6. Спектры ионно-звуковых колебаний неизотермической магнитоактивной плазмы.

(8.30). На рис. 6 приведены спектры ионно-звуковых колебаний неизотермической ($T_e > 6T_i$) магнитоактивной плазмы в пределе $k^2 r_{De}^2 \ll 1$, основанные на анализе уравнения (8.4) (см. [3]).

Из приведенного выше анализа мы убедились, что низкочастотные колебания холодной магнитоактивной плазмы, так же как альвеновские и быстрые магнитозвуковые волны, существуют также и в горячей плазме (т. е. при учете теплового движения частиц) в области фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$, причем при $\beta = \frac{8\pi N T}{B_0^2} \ll 1$ не меняют вида даже спектры этих колебаний (8.16). Такое же положение имеет место и для третьей, чисто электронной ветви колебаний, частоты которой определяются формулой (8.18) (спиральные волны). Учитывая, что такие колебания возможны лишь при условиях

$\omega_{Ne}^2 \gg \omega \omega_{Be}$; $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$, когда $|\varepsilon_{zz}| \gg |\varepsilon_{xy}|$, а $|\varepsilon_{xy}| \gg \gg |\varepsilon_{xx}|, |\varepsilon_{yy}|, |\varepsilon_{yz}|, |\varepsilon_{xz}|$, из дисперсионного уравнения (8.1) находим декремент затухания спиральных волн

$$\frac{\gamma_3}{|\omega_3|} = - \frac{v_e}{2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{|\omega_{Be} \cos \theta|} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \eta \frac{\omega_3^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{k v_{Te} |\omega_{Be}|} \exp \left\{ - \frac{\omega_3^2}{2 k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta} \right\}, \quad (8.33)$$

где

$$\eta = \begin{cases} \frac{\omega_3^4}{2 k^4 v_{Te}^4 \cos^4 \theta} & \text{при } \omega_3^2 \gg k_z^2 v_{Te}^2, \\ 1 & \text{при } \omega_3^2 \ll k_z^2 v_{Te}^2. \end{cases}$$

Здесь $v_e = v_{эфф}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$ для слабоионизованной. Из выражения (8.33) видно, что в пределе холодной плазмы ($\omega_3^2 \gg k_z^2 v_{Te}^2$) бесстолкновительное черенковское поглощение спиральных волн электронами плазмы экспоненциально мало, их поглощение в основном определяется столкновениями электронов. При уменьшении фазовой скорости ω_3/k_z бесстолкновительное поглощение растет и при $\omega_3 \lesssim k_z v_{Ti}$ становится настолько интенсивным (благодаря поглощению волн ионами плазмы), что спиральные волны как слабозатухающие перестают существовать. Заметим также, что соотношение между ω и v_e в спиральных волнах может быть произвольным; для того чтобы они слабо затухали, достаточно выполнения неравенств $v_e \ll \omega_{Be}$ и $v_e \ll k_z v_{Te}$ (последнее неравенство должно выполняться лишь в области малых фазовых скоростей колебаний, когда $\omega_3 \lesssim k_z v_{Te}$).

в) Циклотронные волны. В холодной магнитоактивной плазме, как было показано выше, число различных ветвей колебаний не превышает пяти. При учете теплового движения появляется шестая ветвь — так называемая медленная магнитозвуковая волна (или при $\beta \ll 1$ — ионно-звуковая волна), которая может существовать лишь в неизотермической плазме с $T_e > 6 T_i$. Все эти ветви колебаний могут быть описаны с помощью гидродинамических уравнений, полученных в § 4. Поэтому их часто называют гидродинамическими ветвями колебаний*). Не следует,

*) Напомним еще раз, что продольные волны не являются независимыми ветвями колебаний магнитоактивной плазмы. Произвольные непотенциальные волны в области частот, где $n^2(\omega) \rightarrow \infty$, с большой степенью точности являются продольными.

однако, думать, что этими шестью ветвями колебаний полностью описываются спектры всевозможных волн горячей магнитоактивной плазмы. Действительно, дисперсионное уравнение (8.1) при учете теплового движения частиц является трансцендентным, и, следовательно, число ветвей колебаний магнитоактивной плазмы может быть бесконечно велико. Однако подавляющее большинство этих колебаний является сильно затухающим. Только в некоторых специальных случаях тепловое движение частиц приводит к возможности существования крупномасштабных слабозатухающих колебаний, таких, какие были рассмотрены выше.

Кроме рассмотренных выше колебаний заслуживают внимания также колебания вблизи циклотронных частот электронов и ионов $\omega \approx s\omega_{Be,i}$ ($s = 1, 2, \dots$), или, иными словами, циклотронные волны. Эти волны в последние годы стали предметом тщательного исследования в связи с возможностью их использования для нагрева плазмы в условиях, когда столкновительное поглощение волн (или, как часто говорят, омический нагрев) является неэффективным (например, при высоких термоядерных температурах). Мы здесь не будем подробно излагать теорию циклотронных колебаний магнитоактивной плазмы, а ограничимся лишь исследованием циклотронных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля (для более подробного знакомства с этим вопросом отсылаем читателя к монографиям [1—7], где приведена также довольно полная библиография). Именно для таких волн явление циклотронного резонанса (или циклотронного поглощения) наиболее явно выражено*). Рассмотрение начнем со случая бесстолкновительной плазмы. Дисперсионное уравнение (8.1) для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, при этом записывается в виде уравнений

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right) \right] = 0, \quad (8.34)$$

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega (\omega \mp \omega_{B\alpha})} J_+ \left(\frac{\omega \mp \omega_{B\alpha}}{kv_{T\alpha}} \right) \right\}.$$

*) Следует заметить, однако, что для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, отсутствуют резонансы на кратных циклотронных частотах, т. е. при $|s| > 1$, которые появляются лишь при $k_{\perp} \neq 0$ (о кратных резонансах см. [1—5]).

Первое из этих уравнений описывает продольные колебания поля в плазме и в точности совпадает с уравнением (6.2) для плазмы без поля. Второе и третье уравнения описывают поперечные обыкновенную и необыкновенную волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Видно, что в резонансе с полем при $\omega = \omega_{B\alpha}$ может находиться лишь одна из этих волн, в которой вектор поляризации электрического поля совпадает с направлением ларморовского вращения частиц сорта α . Исследованием этой волны мы и ограничимся ниже.

Рассмотрим сначала волну вблизи электронной циклотронной частоты $\omega \approx \omega_{Be}$. Если при этом $|\omega - \omega_{Be}| \gg kv_{Te}$ (или, говоря на языке оптики, если частота ω лежит вне линии резонансного поглощения), то из уравнений (8.34) находим следующие выражения для показателя преломления μ и коэффициента поглощения κ электронной циклотронной волны:

$$\mu^2 = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})} \approx - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})}, \quad (8.35)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \frac{c}{v_{Te}} \frac{1}{\mu^2} \exp \left\{ - \frac{(\omega - \omega_{Be})^2 c^2}{2\mu^2 \omega^2 v_{Te}^2} \right\}.$$

Отсюда видно, что электронные циклотронные волны могут распространяться в плазме лишь в области частот $\omega < \omega_{Be}$, причем вне резонансной линии в бесстолкновительном пределе они поглощаются экспоненциально слабо. Учет столкновений частиц приводит к следующей поправке в коэффициенте поглощения волн (при условии (7.11)):

$$\delta\kappa = \frac{1}{2\mu} \frac{v_e \omega_{Ne}^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})^2}, \quad (8.36)$$

где $v_e = v_{эфф}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$ для слабоионизованной.

Воспользовавшись формулами (8.35) и (8.36), легко записать также выражения для частоты колебаний и декремента затухания циклотронных волн вне линии резонансного поглощения. Они имеют вид

$$\omega \approx \omega_{Be} \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 c^2} \right), \quad (8.37)$$

$$\gamma = - \frac{v_e}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Be}^2 \omega_{Ne}^4}{k^5 c^4 v_{Te}} \exp \left\{ - \frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\}.$$

Отсюда, кстати, следует, что для слабозатухающих циклотронных колебаний $k^2 c^2 \gg \omega_{Ne}^2$.

Если частота ω находится так близко от циклотронной частоты ω_{Be} , что мы попадаем внутрь линии резонансного поглощения, т. е. $|\omega - \omega_{Be}| \ll kv_{Te}$, то из уравнений (8.34) в бесстолкновительном пределе находим

$$n = \mu + i\kappa = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \frac{c}{v_{Te}} \right)^{1/3}. \quad (8.38)$$

Таким образом, циклотронные волны в области частот внутри резонансной линии сильно поглощаются в плазме ($\mu \sim \kappa$). Выражение

$$\delta = \frac{c}{\kappa\omega} = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c^2 v_{Te}}{\omega \omega_{Ne}^2} \right)^{1/3} \quad (8.39)$$

при этом определяет глубину проникновения циклотронных волн в плазму (аномальный скин-эффект, ср. с (6.38)).

Формулы (8.38) и (8.39) остаются справедливыми и при наличии столкновений частиц, если только $v_e \ll kv_{Te} \sim v_{Te} \left(\frac{\omega_{Ne}^2 \omega}{c^2 v_{Te}} \right)^{1/3}$. В ионосферной плазме это условие выпол-

няется на высотах больше или порядка 200 км. На высотах же 100 км и ниже оно нарушается (на этих высотах ионосферную плазму можно считать слабоионизованной). В высокотемпературной лабораторной плазме в сильных магнитных полях указанное условие, как правило, выполняется с большим запасом; в плазме же газового разряда (обычно слабоионизованной) в подавляющем большинстве случаев имеет место обратное условие. Поэтому естественно рассмотреть область частот $|\omega - \omega_{Be}| \ll v_e$, в которой

$$n = \mu + i\kappa = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_{Ne}^2}{\omega v_e} \right)^{1/2}, \quad (8.40)$$

где $v_e = v_{эфф}$ для случая полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$ — для слабоионизованной.

Отсюда для глубины проникновения поля в плазму получаем формулу для нормального скин-эффекта с (6.39):

$$\delta = \left(\frac{2c^2 v_e}{\omega \omega_{Ne}^2} \right)^{1/2} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad (8.41)$$

где σ — статическая проводимость плазмы вдоль магнитного поля.

На рис. 7 показано поведение n^2 для электронной циклотронной волны вблизи резонансной линии поглощения $\omega \approx \omega_{Be}$. Заштрихованная область соответствует сильному поглощению волн в плазме.

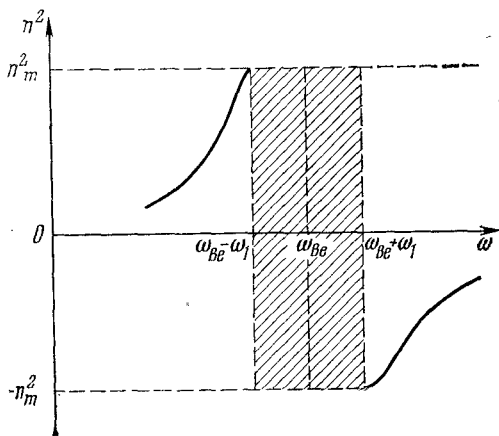


Рис. 7. Функция $n^2(\omega)$ для электронных циклотронных волн

$$n_m^2 = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(\frac{c}{v_{Te}} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{2/3} & \text{при } \omega_1 = n_m \frac{v_{Te}}{c} \omega_{Be} \gg v_e, \\ \frac{1}{2} \frac{\omega_{Ne}^2}{v_e \omega_{Be}} & \text{при } \omega_1 = n_m \frac{v_{Te}}{c} \omega_{Be} \ll v_e. \end{cases}$$

Совершенно аналогичный характер имеет распространение ионных циклотронных волн ($\omega \approx \omega_{Bi}$) вдоль магнитного поля. Более того, проведенный выше анализ уравнений (8.34) для электронных волн непосредственно переносится на случай ионных циклотронных волн простой заменой электронных величин на ионные. Поэтому здесь мы не будем приводить общих формул, касающихся ионных циклотронных волн, а интересующегося деталями читателя отошлем к монографиям [3, 5].

В заключение настоящего параграфа рассмотрим еще один тип «циклотронных» колебаний, получивших название мод Бернштейна. Это продольные потенциальные волны, распространяющиеся перпендикулярно внешнему магнитному полю. Выше уже отмечалось, что при строго продольном распространении волн проявляется лишь

резонанс на основной циклотронной частоте $\omega = \omega_{B\alpha}$; при $k_{\perp} \neq 0$ должны проявляться также и резонансы на кратных циклотронных частотах. Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда волны распространяются строго поперек магнитного поля и $k_{\parallel} = 0$. Поскольку

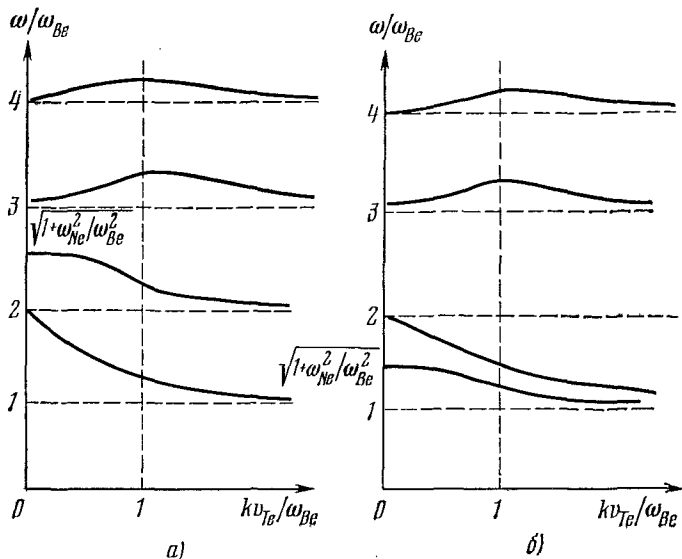


Рис. 8. Спектры мод Бернштейна: а) $\omega_{Ne} > \omega_{Be}$, б) $\omega_{Be} > \omega_{Ne}$.

вблизи циклотронных частот показатели преломления волн сильно возрастают, их с хорошей степенью точности можно считать потенциальными и ограничиться анализом дисперсионного уравнения (8.4)

$$1 - 2 \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \sum_s \frac{s^2 \omega_{B\alpha}^2}{\omega^2 - s^2 \omega_{B\alpha}^2} A_s \left(\frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} \right) = 0. \quad (8.42)$$

При написании этого уравнения мы не только положили $k_{\parallel} = 0$ и тем самым пренебрегли бесстолкновительным поглощением волн в плазме, но для простоты полностью пренебрегли также и столкновительной диссипацией*).

Решения уравнения (8.42) для электронной плазмы графически представлены на рис. 8, причем рис. 8, а

*) Заметим, что в пределе $T \rightarrow 0$ уравнение (8.42) переходит в дисперсионное соотношение (8.13) для продольных колебаний холодной магнитоактивной плазмы, распространяющихся строго поперек магнитного поля (т. е. $\theta = \pi/2$).

Спектры слабозатухающих колебаний холодной магнитоактивной плазмы

Тип колебаний	Спектр частот	Декремент затухания	Показатель преломления	Коэффициент поглощения
<p>Продольные волны $\omega \gg k_z v_{T\alpha}, \nu_\alpha$</p> <p>$k_\perp v_{T\alpha} \ll \omega_{B\alpha}$</p> <p>$\theta \approx \frac{\pi}{2}, \cos^2 \theta \ll \frac{m}{M}$</p>	$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2) \pm \sqrt{(\omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{Ne}^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}$ $\omega_3^2 = \omega_{Bi}^2 \left(1 - \frac{m}{M} \operatorname{tg}^2 \theta \right)$ $\omega_1^2 = \omega_{Be}^2 + \omega_{Ne}^2,$ $\omega_2^2 = \frac{\omega_{Be}^2 (\omega_{Bi}^2 + \omega_{Ni}^2)}{\omega_{Be}^2 + \omega_{Ne}^2},$ $\omega_3^2 = \frac{\omega_{Bi}^2 \omega_{Ne}^2 \cos^2 \theta}{\omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2}$	<p>$\gamma_{1,2} = (\text{см. (8.22)})$</p> <p>$\gamma_3 = (\text{см. (8.22)})$</p> <p>$\gamma_1 = (\text{см. (8.22)})$</p> <p>$\gamma_2 = (\text{см. (8.23)})$</p> <p>$\gamma_3 = (\text{см. (8.23)})$</p>		

Тип колебаний	Спектр частот	Декремент затухания	Показатель преломления	Коэффициент поглощения
<p>Альвеновская волна</p> $\frac{\omega}{k_z} \gg v_{T\alpha}, \quad \omega \ll \omega_{Bi}$	$\omega_1^2 = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{1 + v_A^2/c^2}$	$\gamma_1 = (\text{см. } (8.24))$	$\mu_1^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right)$	$\kappa_1 = -\frac{\gamma_1}{\omega_1} \mu_1$
<p>Быстрая магнитозвуковая волна</p> $\frac{\omega}{k_z} \gg v_{T\alpha}, \quad \omega \ll \omega_{Bi}$	$\omega_2^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}$	$\gamma_2 = (\text{см. } (8.24))$	$\mu_2^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$	$\kappa_2 = -\frac{\gamma_2}{\omega_2} \mu_2$
<p>Спиральная волна</p> $\frac{\omega}{k_z} \gg v_{T\alpha}, \quad \omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ $\omega \omega_{Be} \ll \omega_{Ne}^2$	$\omega_3 = \omega_{Be} \cos \theta \frac{k^2 c^2}{\omega_{Ne}^2}$	$\gamma_3 = (\text{см. } (8.33))$	$\mu_3^2 = \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_3 \omega_{Be} \cos \theta }$	$\kappa_3 = -\frac{\gamma_3}{2\omega_3} \mu_3$

Спектры слабозатухающих колебаний горячей магнитоактивной плазмы

Тип колебаний	Спектр частот	Декремент затухания	Показатель преломления	Показатель поглощения
Продольные волны — ионно-звуковые колебания $\omega \ll \omega_{Bi}$	$\omega^2 = \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta}{1 + k^2 r_{De}^2}$	$\gamma = -\frac{v_i}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8} Z \frac{m}{M} \omega}$	$\mu^2 = \frac{c^2}{v_s^2} \left(\cos^2 \theta - \frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} \right)^{-1}$	$\kappa = -\frac{c\gamma/v_s \omega}{\left(\cos^2 \theta - \frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} \right)^{3/2}}$
$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$ $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$	$\omega^2 = \frac{k^2 v_s^2}{1 + k^2 r_{De}^2}$	$\gamma = -\frac{v_i}{2} - \frac{\omega}{ \cos \theta } \sqrt{\frac{\pi}{8} Z \frac{m}{M}}$	$\mu^2 = \frac{c^2}{v_s^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} \right)^{-1}$	$\kappa = -\frac{c\gamma/v_s \omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} \right)^{3/2}}$
Альвеновские волны $\omega \ll \omega_{Bi}$ $v_{Ti} \ll v_A \ll v_{Te}$	$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta$	$\gamma = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} v_e + v_i \right)$	$\mu^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{\cos^2 \theta}$	$\kappa = -\frac{\gamma}{\omega} \mu$

Тип колебаний	Спектр частот	Декремент затухания	Показатель преломления	Показатель поглощения
<p>Быстрая и медленная магнитозвуковые волны</p> $\omega \ll \omega_{Bi}$ $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$	$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2}{2} \{v_A^2 + v_s^2 \pm \pm [(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\}^{1/2}$	$\gamma_{\pm} = (\text{см. (8.28), (8.29)})$	$\mu^2 = 2c^2 \{v_A^2 + v_s^2 \pm \pm [(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\}^{-1}$	$\kappa = -\frac{\gamma}{\omega} \mu$
<p>Спиральные волны</p> $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$	$\omega = \omega_{Be} \cos \theta \frac{k^2 c^2}{\omega_{Ne}^2}$	$\gamma = (\text{см. (8.33)})$	$\mu^2 = \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega \omega_{Be} \cos \theta }$	$\kappa = -\frac{\gamma}{2\omega} \mu$
<p>Циклотронные волны</p> $\omega \approx \omega_{Be}$	$\omega \approx \omega_{Be} \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 c^2}\right)$	$\gamma = -\frac{v_e}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}^4 \omega_{Be}^2}{k^5 c^4 v_{Te}} \times \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\}$	$\mu^2 = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega (\omega - \omega_{Be})}$	$\kappa \approx \mu \frac{\gamma}{\omega - \omega_{Be}}$

соответствует случаю плотной плазмы, когда $\omega_{Ne} > \omega_{Be}$, а рис. 8, б, напротив, случаю разреженной плазмы, в которой $\omega_{Ne} < \omega_{Be}$. Следует обратить внимание, что в области длинных волн, т. е. при $k v_{Te} \ll \omega_{Be}$, фазовые и групповые скорости высокочастотных мод колебаний Бернштейна ($\omega > 2\omega_{Be}$) параллельны, в то время как в коротковолновой части спектра, когда $k v_{Te} \gtrsim \omega_{Be}$, они становятся антипараллельными. Эти две части одних и тех же ветвей колебаний в литературе часто называют прямыми и обратными волнами Бернштейна. К сожалению, анализ дисперсионного уравнения для продольных колебаний горячей плазмы, распространяющихся поперек магнитного поля, при учете столкновений частиц до сих пор отсутствует; нет поэтому и общего анализа затухания мод Бернштейна.

В таблицах VI и VII приведены спектры частот слабозатухающих колебаний магнитоактивной плазмы, декременты их затухания, а также показатели преломления и коэффициенты поглощения. Там же указаны условия существования таких колебаний в плазме.

§ 9. КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПЛАЗМОЙ

Выше мы всюду рассматривали электромагнитные колебания плазмы с изотропной невозмущенной функцией распределения частиц по скоростям. Более того, при конкретных вычислениях предполагалось, что распределение частиц сорта α является максвелловским, или, иными словами, плазма считалась термодинамически квазиравновесной. Малые колебания такой плазмы, как и следовало ожидать, оказались затухающими во времени; энергия колебаний поглощалась плазмой. Реальная плазма, однако, как в лабораторных, так и в ионосферных условиях часто далека от термодинамически равновесного состояния. Такая плазма обладает избытком энергии, который может передаваться электромагнитным колебаниям, вызывая нарастание амплитуды колебаний во времени. В подобных случаях говорят, что плазма является неустойчивой по отношению к электромагнитным колебаниям. Ниже на примере плазмы с анизотропной функцией

распределения частиц по скоростям будет показано, что уже при малых отклонениях состояния плазмы от термодинамически равновесного в ней развиваются неустойчивости.

Таким образом, основной вопрос при изучении электромагнитных колебаний плазмы с анизотропной функцией распределения — это вопрос ее устойчивости. Исследование устойчивости плазмы, как отмечалось в § 2, сводится к решению начальной задачи для малых колебаний. Поведение начальных возмущений во времени в первую очередь определяется корнями дисперсионного уравнения (2.23):

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (9.1)$$

Именно, корни этого уравнения $\omega_n(\mathbf{k})$ (где $n = 1, 2, \dots$) при больших t определяют развитие во времени малых возмущений электромагнитных величин

$$\varphi_k(t) \sim \varphi_k(0) \exp(-i\omega_n t).$$

Если хотя бы для одного корня $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) > 0$, то возмущение нарастает со временем, что соответствует неустойчивости системы. Если же для всех корней уравнения (9.1) $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) < 0$, то система устойчива и все возмущения в ней затухают.

Как найти тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ для плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям? Для этого, очевидно, нужно задаться той или иной моделью описания плазмы (см. § 3). Наиболее общей из них, естественно, является модель кинетического уравнения; ею мы и будем пользоваться ниже. При этом ограничимся рассмотрением двух характерных примеров плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям, которые чаще всего встречаются как в ионосферных, так и в лабораторных условиях. Именно, будет исследована устойчивость пространственно однородной плазмы с анизотропным давлением, но при отсутствии направленного движения частиц в ней, и плазмы в условиях, когда ее анизотропия обусловлена относительным движением различных компонент (взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой; плазма с током).

а) Неустойчивость однородной плазмы с анизотропным давлением. Рассмотрим пространственно однородную плазму, в которой распределение частиц данного сорта

$\alpha = e, i$ по скоростям является анизотропным, однако средняя направленная скорость отсутствует, т. е.

$$f_{0\alpha}(v) = f_{0\alpha}(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2). \quad (9.2)$$

Примером такой функции распределения, в частности, является распределение Максвелла с анизотропной температурой *)

$$f_{0\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{(2\pi m_{\alpha})^{3/2} T_{\perp\alpha} \sqrt{T_{\parallel\alpha}}} \exp \left\{ -\frac{m_{\alpha} v_{\perp}^2}{2T_{\perp\alpha}} - \frac{m_{\alpha} v_{\parallel}^2}{2T_{\parallel\alpha}} \right\}, \quad (9.3)$$

где $T_{\parallel\alpha}$ и $T_{\perp\alpha}$ — температуры соответственно вдоль и поперек некоторого выделенного в пространстве направления (например, внешнего магнитного поля).

Распределение (9.3) не является строго равновесным в том смысле, что оно не удовлетворяет стационарному кинетическому уравнению (3.19) с учетом столкновений частиц в плазме. Действительно, вследствие столкновений частиц (в основном частиц сорта α между собой) температуры $T_{\parallel\alpha}$ и $T_{\perp\alpha}$ будут выравниваться. При малой анизотропии температур, когда

$$|T_{\perp\alpha} - T_{\parallel\alpha}| \ll T_{\alpha},$$

подстановка (9.3) в уравнение (4.10) после умножения на $\frac{m_{\alpha} v_{\perp}^2}{2}$ и $\frac{m_{\alpha} v_{\parallel}^2}{2}$ и усреднения по скоростям приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_{\perp\alpha} - T_{\parallel\alpha}) = -\nu_{\alpha T} (T_{\perp\alpha} - T_{\parallel\alpha}) \quad (9.4)$$

где

$$\nu_{\alpha T} = \frac{8}{5} \sqrt{\frac{\pi}{m_{\alpha}}} \frac{e_{\alpha}^4 N_{\alpha} I_{\perp}}{T_{\alpha}^{3/2}}. \quad (9.5)$$

Отсюда видно, что за время порядка времени свободного пробега частиц $\frac{1}{\nu_{\alpha T}}$ происходит выравнивание температур $T_{\perp\alpha}$ и $T_{\parallel\alpha}$. Поэтому распределение (9.3) можно считать равновесным только в течение времени $t \ll \frac{1}{\nu_{\alpha T}}$, т. е. в условиях, когда можно пренебречь столкновениями

*) Причиной такой анизотропии плазмы в лабораторных условиях может оказаться способ ее создания, либо способ нагрева.

частиц. Это обстоятельство существенно облегчает исследование устойчивости анизотропной плазмы с распределением (9.3), так как позволяет ограничиться рассмотрением бесстолкновительной плазмы.

Следуя методу, изложенному в § 7, для компонент тензора диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы с анизотропной температурой получим следующие выражения (ср. с (7.6)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 - \sum_{\alpha} \sum_s \left\{ \frac{s^2 \omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) \frac{A_s(Z_{\alpha})}{Z_{\alpha}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^2 \omega_{N\alpha}^2}{\omega(\omega - s\omega_{B\alpha})} \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \frac{A_s(Z_{\alpha})}{Z_{\alpha}} \left[1 + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] J_+(\beta_{s\alpha}) \right\}, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx} - 2 \sum_{\alpha} \sum_s \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} Z_{\alpha} A'_s(Z_{\alpha}) \left\{ \left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s\omega}{\omega - s\omega_{B\alpha}} \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \left[1 + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] J_+(\beta_{s\alpha}) \right\}, \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = i \sum_{\alpha} \sum_s \frac{s\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} A'_s(Z_{\alpha}) \left\{ \left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{\omega - s\omega_{B\alpha}} \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \left[1 + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] J_+(\beta_{s\alpha}) \right\}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \sum_{\alpha} \sum_s \frac{s\omega_{N\alpha}^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{A_s(Z_{\alpha})}{Z_{\alpha}} \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] [1 - J_+(\beta_{s\alpha})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = -i \sum_{\alpha} \sum_s \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} A'_s(Z_{\alpha}) \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] [1 - J_+(\beta_{s\alpha})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= 1 + \sum_{\alpha} \sum_s \frac{\omega_{N\alpha}^2 (\omega - s\omega_{B\alpha})}{\omega k_{\parallel}^2 v_{T\alpha}^2} A_s(Z_{\alpha}) \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] [1 - J_+(\beta_{s\alpha})], \end{aligned}$$

где $Z_{\alpha} = k_{\perp}^2 v_{T\perp\alpha}^2 / \omega_{B\alpha}^2$, $\beta_{s\alpha} = \frac{\omega - s\omega_{B\alpha}}{k_{\parallel} v_{T\parallel\alpha}}$, ось Oz направлена

вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 , а $T_{\parallel\alpha}$ и $T_{\perp\alpha}$ соответственно температуры частиц сорта α вдоль и поперек магнитного поля. Из формул (9.6) находим продольную диэлектрическую проницаемость магнитоактивной плазмы с анизотропной температурой (ср. с (7.22)):

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v^2 T_{\parallel\alpha}} \times \\ \times \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\omega_{B\alpha}} \left[1 + \frac{s\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(\frac{T_{\parallel\alpha}}{T_{\perp\alpha}} - 1 \right) \right] A_s(Z_{\alpha}) J_+(\beta_{s\alpha}) \right\}. \quad (9.7)$$

Тензор диэлектрической проницаемости для плазмы с анизотропной температурой в отсутствие внешнего магнитного поля можно получить непосредственно из формул (9.6) путем перехода к пределу $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$. Однако такой предельный переход сопряжен с математическими трудностями, связанными с суммированием функций Бесселя при больших значениях аргумента. Проще заново решать кинетическое уравнение при $\mathbf{B}_0 = 0$, как это было сделано в § 5, направив ось Oz вдоль волнового вектора \mathbf{k} . В результате для тензора диэлектрической проницаемости плазмы получим выражение

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

где

$$\varepsilon_{11} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \frac{1}{T_{\alpha}^{*2}} [T_{\parallel\alpha} T_{\perp\alpha} - \right. \\ \left. - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha})^2] (J_+(\beta_{\alpha}^*) - 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{T_{\alpha}^{*2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha})^2 (\beta_{\alpha}^{*2} J_+(\beta_{\alpha}^*) - \beta_{\alpha}^{*2} - 1) \right\}, \quad (9.9)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\sin 2\theta}{2T_{\alpha}^*} (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha}) [(\beta_{\alpha}^{*2} - 1) J_+(\beta_{\alpha}^*) - \beta_{\alpha}^{*2}],$$

$$\varepsilon_{22} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \left[\left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) + \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} J_+(\beta_{\alpha}^*) \right],$$

$$\varepsilon_{33} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \beta_{\alpha}^* [1 - J_+(\beta_{\alpha}^*)].$$

Здесь $T_{\alpha}^* = T_{\parallel\alpha} \cos^2 \theta + T_{\perp\alpha} \sin^2 \theta$, $\beta_{\alpha}^* = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_{\alpha}}{T_{\alpha}^*}}$, а θ — угол между направлением волнового вектора \mathbf{k} (ось Oz) и направлением, в котором температура частиц равна $T_{\parallel\alpha}$. Формулы (9.8) и (9.9) приводят к следующему выражению для продольной диэлектрической проницаемости немагнитной плазмы с анизотропным давлением:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \beta_{\alpha}^{*2} [1 - J_+(\beta_{\alpha}^*)]. \quad (9.10)$$

Это выражение по виду совпадает с выражением для продольной диэлектрической проницаемости изотропной плазмы (5.9), если в последнем под T_{α} понимать T_{α}^* .

Теперь, когда получено выражение для диэлектрической проницаемости плазмы, мы можем перейти к исследованию ее устойчивости путем анализа спектров малых колебаний на основе дисперсионного уравнения (9.1). Прежде заметим, однако, что, согласно формулам (9.6) — (9.10), антиэрмитовские части компонент тензора диэлектрической проницаемости плазмы с анизотропной температурой, обусловленные черенковским поглощением и излучением волн, могут иметь знак, противоположный по сравнению со случаем изотропной плазмы. Это обстоятельство является признаком возможности появления неустойчивостей в плазме, что и подтверждается анализом решений дисперсионного уравнения (9.1).

В отсутствие внешнего магнитного поля дисперсионное уравнение (9.1) при подстановке выражения (9.8) сводится к следующим двум уравнениям:

$$\begin{aligned} k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{22} &= 0, \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11}\right) \varepsilon_{33} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Первое из этих уравнений описывает чисто поперечную волну, в которой поле \mathbf{E} направлено вдоль оси Oy , второе же — волну, в которой поле \mathbf{E} лежит в плоскости xOz и которая не является не чисто продольной и не чисто поперечной. При $\theta = 0$ (продольное распространение) и $\theta = \pi/2$ (поперечное распространение) второе уравнение (9.11) в свою очередь распадается на два уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= 0, \\ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (9.12)$$

описывающих чисто продольную (потенциальную) $E \parallel k$ и чисто поперечную $E \perp k$ волны соответственно, причем $T^* = T_{\parallel}$ при $\theta = 0$ и $T^* = T_{\perp}$ при $\theta = \pi/2$.

Легко показать, что продольные колебания в плазме с анизотропным давлением всегда устойчивы, т. е. решения первого уравнения (9.12) описывают только затухающие во времени колебания плазмы. Более того, устойчивыми оказываются продольные колебания немагнитической плазмы с анизотропным давлением, распространяющиеся под произвольным углом $\theta \neq 0, \pi/2$. Это сразу видно из выражения (9.10), которое, как отмечалось, отличается от продольной диэлектрической проницаемости изотропной плазмы заменой $T_{\alpha} \rightarrow T_{\alpha}^*$.

Иное положение имеет место для поперечных волн, которые описываются вторым уравнением (9.12), или в явном виде

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{T_{\parallel\alpha} T_{\perp\alpha}}{T_{\alpha}^{*2}} (J_+(\beta_{\alpha}^*) - 1) \right] \right\}. \quad (9.13)$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ это уравнение имеет один и тот же вид с заменой $T_{\parallel\alpha} \rightleftharpoons T_{\perp\alpha}$. Поэтому достаточно его проанализировать для случая $\theta = 0$; все выводы при этом переносятся и на случай $\theta = \pi/2$ с учетом указанной замены.

Для простоты ограничимся рассмотрением чисто электронной плазмы с анизотропной температурой (т. е. вкладом ионов в уравнение (9.13) пренебрежем). В области больших фазовых скоростей волн, когда $\beta_{\parallel e}^* = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m}{T_{\parallel e}}} \gg 1$, из (9.13) получим

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{T_{\perp e}}{m} \right) \right]. \quad (9.14)$$

Корни этого уравнения с большой степенью точности равны

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_{Ne}^2 + k^2 c^2, \\ \omega_2^2 &= - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega_{Ne}^2 + k^2 c^2} k^2 \frac{T_{\perp e}}{m}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Второй корень всегда отрицательный, $\omega_2^2 < 0$, что соответствует аperiodически неустойчивым колебаниям анизотропной плазмы. Из использованного условия $\omega^2 \gg k^2 \frac{T_{\parallel e}}{m}$

следует, что рассмотренная неустойчивость возможна лишь при достаточно большой анизотропии, когда $T_{\perp e} \gg T_{\parallel e}$ (либо $T_{\parallel e} \gg T_{\perp e}$ в случае поперечного распространения волн).

Не следует думать, что для возникновения неустойчивости в плазме необходима сильная анизотропия электронной температуры. Неустойчивость может существовать и при очень малой анизотропии температуры. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (9.13) для электронной плазмы в пределе малых фазовых скоростей волн, когда $\omega^2 \ll k^2 \frac{T_{\parallel e}}{m}$. Тогда имеем

$$k^2 c^2 + \omega_{Ne}^2 \left(1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right) - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Ne}^2}{k} \sqrt{\frac{m}{T_{\parallel e}}} \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} = 0. \quad (9.16)$$

Отсюда находим

$$\omega = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sqrt{T_{\parallel e} / m}}{\omega_{Ne}^2} \left[k^2 c^2 + \omega_{Ne}^2 \left(1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right) \right]. \quad (9.17)$$

Видно, что в неограниченной плазме (в которой волновой вектор может быть сколь угодно малым) величина $\text{Im} \omega$ может стать положительной при сколь угодно малой анизотропии температуры электронов, $T_{\perp e} > T_{\parallel e}$ (либо при $T_{\parallel e} > T_{\perp e}$ для волн, распространяющихся под углом $\theta = \pi/2$), что соответствует неустойчивости плазмы. Единственным ограничением на степень анизотропии температуры электронов является требование $\text{Im} \omega \gg v_{eT}$, поскольку только при выполнении этого неравенства неустойчивость в плазме может значительно возрасти, прежде чем выравняются температуры $T_{\perp e}$ и $T_{\parallel e}$ вследствие столкновений электронов между собой. Требование $\text{Im} \omega \gg v_{eT}$, естественно, должно соблюдаться и для развития рассмотренной выше неустойчивости при большой анизотропии температур.

Следует отметить, что неустойчивость при малой анизотропии плазмы, описываемая формулой (9.17), в отличие от высокочастотной неустойчивости сильно анизотропной плазмы со спектром частот (9.15), обусловлена изменением знака мнимой части компоненты ϵ_{11} тензора диэлектрической проницаемости, а поэтому является диссипативной, т. е. в основе своей связана с изменением характера диссипации энергии в плазме.

Рассмотренная выше неустойчивость плазмы с анизотропным давлением сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля. Здесь мы покажем это на примере волн распространяющихся строго вдоль магнитного поля (т. е. при $k = k_{\parallel}$, $k_{\perp} = 0$). Дисперсионное уравнение (9.1) при подстановке тензора (9.6) в этом случае распадается на три уравнения

$$\begin{aligned} k^2 c^2 &= \omega^2 (\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}), \\ \varepsilon_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Последнее уравнение, в точности совпадающее с первым уравнением (9.12), описывает чисто продольную (потенциальную) волну и в рассматриваемом пределе неустойчивых решений не имеет. Первые же два уравнения (9.18) соответствуют обыкновенной и необыкновенной электромагнитным волнам, распространяющимся вдоль магнитного поля, и после использования формул (9.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} k^2 c^2 &= \omega^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega \mp \omega_{B\alpha}} J_{\pm} \left(\frac{\omega \mp \omega_{B\alpha}}{k \sqrt{T_{\parallel\alpha}/m_{\alpha}}} \right) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left(\frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \pm \frac{\omega_{B\alpha}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) \right) + \left(1 - \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Так же как и выше, ограничимся рассмотрением чисто электронной плазмы с анизотропной температурой. В области частот вдали от электронного циклотронного резонанса, в которой $|\omega \pm \omega_{Be}| \gg k \sqrt{T_{\parallel e}/m}$, уравнение (9.19) принимает вид

$$\begin{aligned} k^2 c^2 &= \omega^2 \left\{ 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Be})} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega k \sqrt{T_{\parallel e}/m}} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \pm \frac{\omega_{Be}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\omega \mp \omega_{Be})^2}{k^2 T_{\parallel e}/m} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Отсюда видно, что в замагниченной электронной плазме с анизотропной температурой рассматриваемая волна может быть неустойчивой только в области низких частот $\omega \ll \omega_{Be}$. В этой области частот возбуждается уже известная нам (см. § 8) спиральная волна, причем

(напомним: $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$)

$$\omega = \frac{\omega_{Be}}{\omega_{Ne}^2} k^2 c^2, \quad (9.21)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k c^2 \omega_{Be}^2}{\omega_{Ne}^2 \sqrt{T_{\parallel e}/m}} \left[\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} + \frac{\omega_{Be}}{\omega} \left(1 - \frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[- \frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2k^2 T_{\parallel e}/m} \right].$$

Неустойчивость эта является диссипативной и связана с изменением знака антиэрмитовской части компонент ε_{xx} и ε_{xy} тензора диэлектрической проницаемости при $T_{\perp e} > T_{\parallel e}$; это в свою очередь обуславливает положительность знака декремента затухания спиральной волны, т. е. $\gamma > 0$.

В пространственно неограниченной плазме рассмотренная неустойчивость имеет место практически при сколь угодно малой анизотропии электронной температуры, причем инкремент ее нарастания максимален для волны с $k^2 c^2 = \omega_{Ne}^2 (1 - T_{\parallel e}/T_{\perp e})$, когда

$$\omega = \omega_{Be} \left(1 - \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \right), \quad (9.22)$$

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{Ne} \left(1 - \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} \right)^{3/2} \times \\ \times \frac{T_{\perp e}}{m c^2} \exp \left(- \frac{B_0^2}{8\pi N T_{\perp e}} \frac{T_{\parallel e}}{(T_{\perp e} - T_{\parallel e})} \right).$$

В заключение заметим, что рассмотренные нами примеры охватывают далеко не все виды неустойчивостей плазмы с анизотропной температурой. В частности, при $k_{\perp} \neq 0$ в замагниченной анизотропной плазме возможны не только кинетические, но также и гидродинамические неустойчивости, не связанные с антиэрмитовской частью тензора диэлектрической проницаемости. Более того, в такой плазме, в отличие от незамагниченной, при $k_{\perp} \neq 0$ неустойчивыми оказываются и чисто продольные (потенциальные) волны. Полный анализ всех видов неустойчивостей плазмы с анизотропной температурой можно провести на основе уравнения (9.1) при использовании выражений (9.6) — (9.10). Рассмотрение всех неустойчивостей, однако, выходит за рамки настоящей книги.

Более подробно с неустойчивостями плазмы с анизотропной температурой заряженных частиц (электронов и ионов) читатель может познакомиться по монографиям [4,6] и обзорным статьям А. В. Тимофеева, В. И. Пистуневича и А. Б. Михайловского в сборниках [7].

б) **Взаимодействие электронного пучка малой плотности с высокочастотными колебаниями плазмы.** В качестве следующего примера плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям рассмотрим пространственно неограниченную однородную плазму, пронизываемую также неограниченным электронным пучком малой плотности (т. е. плотности малой по сравнению с плотностью «материнской» плазмы). Именно на этом примере и было открыто явление пучковой неустойчивости плазмы в работах А. И. Ахизера и Я. Б. Файнберга [45] и Д. Бома и Е. Гросса [46]; впоследствии это явление легло в основу нового раздела физики плазмы, получившего название плазменной электроники (о проблемах плазменной электроники см. [47]). Кроме того, задача взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой представляет интерес также и в астрофизике и геофизике, в частности, с точки зрения приложений к ионосфере: из космического пространства на Землю время от времени поступают довольно интенсивные потоки заряженных частиц, электронов и протонов, которые пронизывают ионосферу и возбуждают в ней различного рода плазменные колебания. Задача взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой как раз и ставит своей целью исследование характера возбуждения пучком электромагнитных колебаний в плазме.

Прежде чем перейти к выводу тензора диэлектрической проницаемости системы плазма — пучок и исследовать устойчивость такой системы, заметим, что при инъекции электронного пучка в плазму в последней индуцируются заряды и токи, нейтрализующие заряд и магнитное поле тока пучка (см., например, [48]), так что систему плазма — пучок в равновесии можно считать бестоковой и электрически нейтральной. Кроме того, следует иметь в виду, что невозмущенная функция распределения электронов пучка $f_{0e} = f_{0e}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, где \mathbf{u} — направленная скорость электронов, не является строго стационарной. Вследствие столкновений электронов пучка с электронами и ионами плазмы направленная скорость пучка \mathbf{u} после его инъекции в плазму будет релаксировать со

временем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nu_e(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (9.23)$$

где $\nu_e(\mathbf{u})$ — частота столкновений электронов пучка. Поэтому вводить понятие тензора диэлектрической проницаемости и исследовать устойчивость системы плазма — пучок, строго говоря, законно лишь для процессов, протекающих быстрее, чем время свободного пробега частиц, или, иными словами, для бесстолкновительной плазмы. Это обстоятельство существенно облегчает анализ устойчивости системы плазма — пучок.

Для вычисления тензора диэлектрической проницаемости системы плазма — пучок рассмотрим плазму, в которой функция распределения частиц сорта α имеет вид $f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)$, где \mathbf{u}_α — скорость направленного движения*), которую мы будем считать постоянной и однородной. Тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при этом можно найти, не решая кинетическое уравнение, а используя уже готовые формулы для диэлектрической проницаемости покоящейся плазмы, полученные в §§ 5 и 7, и преобразования Лоренца. Действительно, полный ток в плазме есть сумма токов отдельных компонент:

$$j_i = \sum_{\alpha} j_{\alpha i} = \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}) E_j. \quad (9.24)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k})$ — вклад в тензор проводимости плазмы, обусловленный частицами сорта α . Для того чтобы найти эту величину, перейдем в систему координат, связанную с частицами данного сорта, движущуюся относительно лабораторной системы со скоростью \mathbf{u}_α . В этой системе координат

$$j'_{\alpha i} = \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) E'_{\alpha j}. \quad (9.25)$$

Здесь j'_{α} и E'_{α} — ток и электрическое поле в движущейся системе, которые связаны с j_{α} и E формулами преобразования Лоренца

$$j_{\alpha i} = \alpha_{ij}(\mathbf{u}_\alpha) j'_{\alpha j}, \quad E'_{\alpha i} = \beta_{ij}(\mathbf{u}_\alpha) E_j, \quad (9.26)$$

*) При наличии внешнего магнитного поля эта скорость считается параллельной силовым линиям магнитного поля; только такая постановка задачи имеет, вообще говоря, физический смысл.

где

$$\alpha_{ij}(\mathbf{u}) = \delta_{ij} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[\frac{u_i u_j}{u^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) + \frac{u_i k'_j}{\omega'} \right], \quad (9.27)$$

$$\beta_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\omega'}{\omega} \delta_{ij} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[\frac{u_i u_j}{u^2} \left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - 1 \right) + \frac{u_j k'_i}{\omega} \right],$$

а ω' и \mathbf{k}' — лоренцевски преобразованные частота и волновой вектор:

$$\omega' = \frac{\omega - \mathbf{u}\mathbf{k}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (9.28)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{u} \frac{\mathbf{u}\mathbf{k} (1 - \sqrt{1-u^2/c^2}) - \omega \frac{u^2}{c^2}}{u^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Из формул (9.24) — (9.28) теперь уже легко получить искомый тензор диэлектрической проницаемости всей плазмы в целом в лабораторной системе координат [49]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \alpha_{i\mu}(\mathbf{u}_{\alpha}) \sigma_{\mu\nu}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) \beta_{\nu j}(\mathbf{u}_{\alpha}) = \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega'_{\alpha}}{\omega} \alpha_{i\mu}(\mathbf{u}_{\alpha}) [\varepsilon_{\mu\nu}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) - \delta_{\mu\nu}] \beta_{\nu j}(\mathbf{u}_{\alpha}). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha})$ — диэлектрическая проницаемость частиц сорта α в собственной системе координат, определяемая выражениями, полученными выше (см. §§ 5 и 7).

При использовании формулы (9.29) следует иметь в виду, что в выражении для $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha})$, наряду с частотой и волновым вектором, преобразуются плотность частиц (вследствие сокращения объема) и их масса; в результате $\omega_{N\alpha}^2$ остается инвариантным, а $\omega_{B\alpha}$ преобразуется:

$$\omega'_{B\alpha} \rightarrow \omega_{B\alpha} \sqrt{1 - \frac{u_{\alpha}^2}{c^2}}. \quad (9.30)$$

Формулы (9.27) — (9.28) обобщают известные соотношения Минковского (см., например, [8]) на случай сред с частотной и пространственной дисперсией на примере бесстолкновительной плазмы. Особо простой вид эти формулы принимают в нерелятивистском пределе, когда

$u_\alpha \ll c$. В этом пределе имеем

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega - \mathbf{u}\mathbf{k}, & \mathbf{k}' &= \mathbf{k}, \\ \alpha_{ij}(\mathbf{u}) &= \delta_{ij} + \frac{u_i k_j}{\omega'}, & \beta_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{\omega'}{\omega} \delta_{ij} + \frac{k_i u_j}{\omega}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Подставляя выражение (9.29) в уравнение (9.1) и анализируя всевозможные предельные случаи, мы охватим всю теорию взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой. Такая программа, однако, столь обширна, что может составить предмет отдельной монографии *). Как уже отмечалось выше, здесь мы рассмотрим лишь один пример из теории взаимодействия пучка заряженных частиц с плазмой, раскрывающих физику явлений и иллюстрирующих эффективность изложенного выше общего метода, а именно, задачу взаимодействия электронного пучка малой плотности с высокочастотными чисто электронными колебаниями плазмы. При этом мы ограничимся исследованием лишь продольных (потенциальных) колебаний системы плазма — пучок, для которых уравнение (9.1) сводится к виду

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (9.32)$$

Для случая изотропной плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля такое приближение оправдано вследствие предполагаемой малости плотности пучка по сравнению с плотностью плазмы. Действительно, в случае изотропной плазмы продольные колебания являются собственными колебаниями системы, и поскольку только с ними может взаимодействовать электронный пучок (поперечные волны в изотропной плазме обладают фазовой скоростью больше скорости света, см. § 6), возбуждаемые в системе колебания с хорошей степенью точности должны быть потенциальными.

В дальнейшем, для определенности, функции распределения частиц по скоростям в собственной системе координат будем считать максвелловскими. Кроме того, направленную скорость электронов пучка считаем намного превосходящей тепловые скорости частиц. Это позволяет ограничиться исследованием лишь высокочастотных коле-

*) Теории взаимодействия заряженных частиц с плазмой посвящено большое число работ. Библиографию по этому вопросу можно найти в книгах [1—4, 6] и в обзорных статьях [50, 51].

баний в системе плазма — пучок, считая выполненными неравенства

$$\omega' = \frac{\omega - uk}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \gg k'v_{1e}, \quad \omega \gg kv_{0e}, \quad (9.33)$$

где u — направленная скорость электронов пучка, а v_{1e} и v_{0e} — соответственно тепловые скорости электронов пучка в собственной системе координат и покоящейся плазмы (ниже индексом «1» обозначены величины, относящиеся к электронному пучку, а индексом «0» — величины, относящиеся к «материнской» плазме).

В условиях (9.33) дисперсионное уравнение для продольных колебаний в системе плазма — пучок запишется в виде

$$1 - \frac{\omega_{N0e}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{N1e}^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}{(\omega' - uk)^2} \left(1 - \frac{(uk)^2}{k^2 c^2} \right) + \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\omega_{N0e}^2 \omega}{k^3 v_{0e}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{0e}^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_{N1e}^2 (\omega - uk)}{k'^3 v_{1e}^3 (1 - u^2/c^2)} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \right) \frac{(uk)^2}{\omega^2} \exp\left(-\frac{\omega'^2}{2k'^2 v_{1e}^2}\right) \right] = 0. \quad (9.34)$$

Здесь величины ω' и k' определены соотношениями (9.28), а ω_{N0e} и ω_{N1e} , в соответствии с принятыми в литературе обозначениями, представляют собой ленгмюровские частоты электронов плазмы и пучка с массой покоя электронов и плотностями N_{0e} и N_{1e} в лабораторной системе координат (предполагаем, что $N_{1e} \ll N_{0e}$).

Мнимые диссипативные слагаемые в уравнении (9.34) обусловлены черенковским поглощением и излучением волн электронами плазмы и пучка; согласно (9.33) они малы по сравнению с недиссипативными членами. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Решение оставшегося при этом уравнения будем искать в виде *)

$$\omega = uk + i\gamma, \quad \text{где } \gamma \ll \omega.$$

*) Искать решение в таком виде диктуется самим уравнением (9.34). Действительно, наиболее сильное взаимодействие пучка с плазмой, очевидно, имеет место в условиях, когда в этом уравнении второе и третье слагаемые в левой части одного порядка. Поскольку в случае пучка малой плотности $\omega_{N1e}^2 \ll \omega_{N0e}^2$, то эти слагаемые могут стать одного порядка только в области частот $|\omega - uk| \ll \omega$.

В результате получаем: при $(\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \neq \omega_{N0e}^2$

$$\gamma^2 = - \frac{\omega_{N1e}^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \omega_{N0e}^2/(\mathbf{k}\mathbf{u})^2} \left(1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{u})^2}{k^2 c^2} \right);$$

при $(\mathbf{u}\mathbf{k})^2 \approx \omega_{N0e}^2$

$$\gamma_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2} \left[\frac{N_{1e}}{2N_{0e}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left(1 - \frac{\omega_{N0e}^2}{k^2 c^2} \right) \right]^{1/3} \mathbf{u}\mathbf{k}, \quad (9.35)$$

$$\gamma_3 = -i \left[\frac{N_{1e}}{2N_{0e}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left(1 - \frac{\omega_{N0e}^2}{k^2 c^2} \right) \right]^{1/3} \mathbf{u}\mathbf{k}.$$

Из этих выражений видно, что рассматриваемые колебания при $(\mathbf{u}\mathbf{k})^2 \lesssim \omega_{N0e}^2$ являются неустойчивыми ($\text{Im } \omega = \text{Re } \gamma > 0$). Максимальным инкрементом обладают колебания с частотой $\text{Re } \omega = \mathbf{u}\mathbf{k} \approx \omega_{N0e}$, распространяющиеся под большим углом к скорости пучка, так что $k^2 c^2 \gg \omega_{N0e}^2$ (поскольку при этом $k_{\perp}^2 \gg k_z^2$), причем

$$\gamma_{\text{max}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{N_{1e}}{2N_{0e}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{1/3} \omega_{N0e}.$$

Рассмотренная неустойчивость не связана с диссипативными эффектами в плазме (с черенковским поглощением или излучением волн частицами плазмы), и в этом смысле ее называют гидродинамической неустойчивостью. (Заметим, что результаты (9.35) можно получить также, исходя из гидродинамических уравнений холодной бесстолкновительной плазмы; см. § 3.)

Наряду с гидродинамической неустойчивостью возможна также диссипативная, или кинетическая, неустойчивость, обусловленная черенковской раскачкой электронами пучка ленгмюровских колебаний покоящейся плазмы. Такая раскачка имеет место при $\mathbf{u}\mathbf{k} > \omega \approx \omega_{N0e}$ в условиях, когда вкладом пучка в вещественную часть диэлектрической проницаемости можно пренебречь (гидродинамическая неустойчивость при этом отсутствует). Уравнение (9.34) в этом случае дает ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$)

$$\omega^2 = \omega_{N0e}^2,$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{N0e}^2 \left[\frac{\omega_{N1e}^2}{k'^3 v_{1e}^3} \left(1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{k}}{\omega} \right) \frac{(\mathbf{u}\mathbf{k})^2}{\omega^2} \frac{(1 - \omega^2/k^2 c^2)}{(1 - u^2/c^2)} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(- \frac{\omega'^2}{2k'^2 v_{1e}^2} \right) + \frac{\omega_{N0e}^2}{k^3 v_{0e}^3} \exp \left(- \frac{\omega_{N0e}^2}{2k^2 v_{0e}^2} \right) \right]. \quad (9.36)$$

Отсюда видно, что неустойчивость $\gamma = \text{Im } \omega > 0$ возможна, если $uk > \omega_{N_{0e}}$. При этом условии электроны пучка излучают ленгмюровские волны, и, если это излучение преобладает над поглощением волн в покоящейся плазме, в системе возникает неустойчивость. Следует заметить, что инкремент нарастания колебаний в этом случае экспоненциально мал, т. е. неустойчивость в этой области длин волн развивается экспоненциально медленно.

На рис. 9 приведена зависимость инкремента нарастания рассмотренной высокочастотной пучковой неустойчивости от длины волны колебаний (точнее, от $\omega \approx uk$). Видно, что максимальный инкремент достигается при $\omega \approx uk \approx \omega_{N_{0e}}$; именно такие волны должны максимально возбуждаться в экспериментальных условиях.

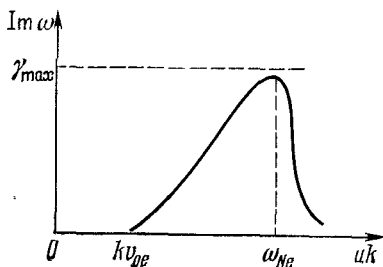


Рис. 9. Зависимость инкремента нарастания высокочастотной пучковой неустойчивости от длины волны колебаний.

Наконец, заметим, что из условия $\omega \gg kv_{0e}$ следует, что рассмотренная высокочастотная неустойчивость может развиваться лишь при скоростях электронного пучка $u \gg v_{0e}$ (точный численный расчет дает $u > 2 v_{0e}$). При этом тепловой разброс электронов в самом пучке может быть произвольным; однако если $u < v_{1e} \left(\frac{N_{0e}}{N_{1e}} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{5/6}$, то возможно развитие лишь медленной кинетической неустойчивости; если же $u > v_{1e} \left(\frac{N_{0e}}{N_{1e}} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{5/6}$, то развивается более быстрая гидродинамическая неустойчивость, с инкрементом нарастания (9.35).

Описанная выше картина развития высокочастотной пучковой неустойчивости в электронной плазме качественно сохраняется также и при наличии внешнего продольного (параллельного направлению скорости пучка) магнитного поля. Более того, для волн, распространяющихся строго вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение в точности совпадает с уравнением (9.34), исследованным выше. Следует, однако, отметить, что в развитии пучковой

неустойчивости на продольных (потенциальных) волнах в магнитоактивной плазме проявляются специфические особенности при распространении волн под углом к магнитному полю, когда $k_{\perp} \neq 0$.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим практически важный случай взаимодействия электронного пучка малой плотности с холодной магнитоактивной плазмой. Тепловым движением электронов как в плазме, так и в пучке полностью пренебрежем, считая выполненными неравенства

$$\frac{k_{\perp} v_{0e}}{\omega_{Be}} \ll 1, \quad \frac{(\omega - s\omega_{Be})}{k_z v_{0e}} \gg 1, \quad (9.37)$$

$$\frac{k'_{\perp} v_{1e}}{\omega_{Be}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \ll 1, \quad \frac{\omega - uk - s\omega_{Be} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{k'_z v_{1e}} \gg 1,$$

где $s = 0, \pm 1$. Используя результаты § 7 и формулы преобразования (9.27) — (9.29), дисперсионное уравнение (9.32) для продольных колебаний системы плазма — пучок при наличии внешнего продольного магнитного поля в условиях (9.37) запишется в виде

$$k_{\perp}^2 \left[1 - \frac{\omega_{N0e}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{N1e}^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}{(\omega - k_z u)^2 - \omega_{Be}^2 (1 - u^2/c^2)} \right] + \\ + k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_{N0e}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{N1e}^2}{(\omega - uk_z)^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{3/2} \right] = 0. \quad (9.38)$$

Заметим, что при получении уравнения (9.38) мы полностью пренебрегли диссипативными эффектами, обусловленными черенковским и магнитотормозным (циклотронным) поглощением волн в плазме. Поэтому в рассматриваемом пределе можно говорить лишь о «сильном» взаимодействии пучка с плазмой или, что то же самое, о гидродинамических неустойчивостях системы плазма — пучок. Учитывая малость плотности пучка ($N_{1e} \ll N_{0e}$), видим, что такое сильное взаимодействие пучка с плазмой имеет место в двух предельных случаях:

$$|\omega - uk| \ll \omega, \\ \left| (\omega - uk)^2 - \omega_{Be}^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right| \ll |\omega^2 - \omega_{Be}^2|. \quad (9.39)$$

Первый из этих случаев исследовался выше для плазмы без магнитного поля. Получающаяся при этом неустой-

чивость мы назвали гидродинамической пучковой неустойчивостью. В магнитоактивной плазме эта неустойчивость остается. Однако формулы (9.35) для инкрементов нарастания колебаний несколько видоизменяются. Действительно, вводя $\omega = uk + i\gamma$ из уравнения (9.38), получаем

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\frac{\omega_{N1e}^2 \cos^2 \theta}{1-A} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} \quad \text{при } A \neq 1, \\ \gamma_{1,2} &= \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2} \left(\frac{N_{1e}}{2N_{0e}}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{uk}{1 - \text{tg}^2 \theta \left[\frac{(uk)^2}{(uk)^2 - \omega_{Be}^2}\right]^2} \\ \gamma_3 &= -i \left(\frac{N_{1e}}{2N_{0e}}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{uk}{1 - \text{tg}^2 \theta \left[\frac{(uk)^2}{(uk)^2 - \omega_{Be}^2}\right]^2} \end{aligned} \quad (9.40)$$

при $A \approx 1$,

где θ — угол между направлением распространения волны и магнитным полем, $k_z = k \cos \theta$, $k_{\perp} = k \sin \theta$, а

$$A = \cos^2 \theta \frac{\omega_{N0e}^2}{(uk)^2} + \sin^2 \theta \frac{\omega_{N0e}^2}{(uk)^2 - \omega_{Be}^2}. \quad (9.41)$$

При $\theta = 0$ (а также в очевидном пределе $\omega_{Be} \rightarrow 0$) формулы (9.40) совпадают с (9.35).

Структуры формул (9.40) и (9.35) аналогичны, а следовательно, и характер рассмотренной пучковой неустойчивости аналогичен исследованной выше неустойчивости немагнитоактивной плазмы. При этом, однако, специфику магнитного поля проявляется в стабилизирующем действии на колебания с $k_{\perp} \neq 0$. Действительно, как легко видеть, неустойчивыми ($\text{Im } \omega = \gamma > 0$) являются колебания при $A \geq 1$. В отсутствие магнитного поля это условие определяет область неустойчивых колебаний $(uk)^2 \lesssim \omega_{N0e}^2$. При наличии же магнитного поля область неустойчивости колебаний оказывается уже. Именно, в плазме с $\omega_{N0e}^2 > \omega_{Be}^2$ неустойчивы колебания в областях $(uk)^2 < \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta$ и $\omega_{Be}^2 < (uk)^2 < \omega_{N0e}^2 + \omega_{Be}^2 \sin^2 \theta$ (т. е. магнитное поле стабилизирует колебания в области $\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta < (uk)^2 < \omega_{Be}^2$; если же $\omega_{Be}^2 > \omega_{N0e}^2$, то неустойчивыми являются колебания в областях $(uk)^2 < \omega_{N0e}^2 \cos^2 \theta$

и $\omega_{Be}^2 < (uk)^2 < \omega_{Be}^2 + \omega_{N0e}^2 \sin^2 \theta$ (в области $\omega_{N0e}^2 \cos^2 \theta < (uk)^2 < \omega_{Be}^2$ магнитное поле стабилизирует неустойчивость). Качественно зависимость инкремента нарастания колебания от частоты $\omega \approx uk$ в случае магнитоактивной плазмы представлена на рис. 10. Следует отметить, что максимальным инкрементом нарастания при

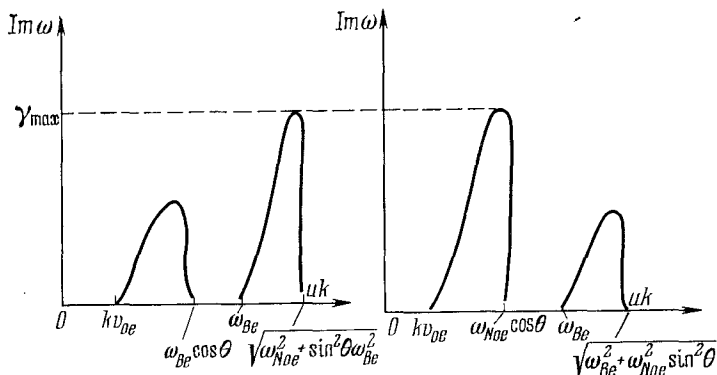


Рис. 10. Зависимость инкремента нарастания высокочастотной пучковой неустойчивости в магнитоактивной плазме от частоты (длины волны) колебаний.

$\omega_{N0e} > \omega_{Be}$ обладают колебания с частотой $\omega \approx \omega_{N0e}$, а при $\omega_{Be} > \omega_{N0e}$ — колебания с частотой $\omega = \omega_{N0e} \cos \theta$, причем

$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{N_{1e}}{2N_{0e}} \right)^{1/3} \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Наконец отметим, что, так же как и в отсутствие внешнего магнитного поля, для развития высокочастотной гидродинамической пучковой неустойчивости в магнитоактивной плазме необходимо, чтобы выполнялись неравенства $u \gg v_{0e}$ и $u \gg v_{1e} \left(\frac{N_{0e}}{N_{1e}} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{5/6}$. Эти неравенства являются следствием условий $\omega \gg k_z v_{0e}$ и $|\omega - uk| \gg k'_z v_{1e}$, при которых справедливо использованное выше приближение холодной плазмы и пучка.

Рассмотрим теперь колебания в системе холодной магнитоактивной плазмы и пучка в области частоты, определяемой неравенством (9.39). Введем замену $\omega = uk + \omega_{Be} + i\gamma$, где $\gamma \ll \omega$. В результате из уравнения (9.38)

получаем, что при условии

$$\sin^2 \theta \frac{\omega_{N_{0e}}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} + \cos^2 \theta \frac{\omega_{N_{0e}}^2}{\omega^2} \approx 1 \quad (9.42)$$

в магнитоактивной плазме с пучком возможно развитие неустойчивости нового типа с инкрементом, определяющимся соотношением

$$\gamma^2 = -\frac{N_{1e}}{4N_{0e}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\sin^2 \theta \left[1 + \frac{uk}{\omega_{Be}} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right]}{\sin^2 \theta \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)^2} + \cos^2 \theta \frac{1}{\omega^2}}. \quad (9.43)$$

Из этого соотношения следует, что неустойчивость имеет место ($\gamma^2 > 0$) при $1 + \frac{uk}{\omega_{Be}} \left(1 - \frac{k^2}{c^2} \right)^{-1/2} < 0$, причем макси-

мальный инкремент ее развития $\gamma_{\max} \approx \sqrt{\frac{N_{1e}}{N_{0e}}} \omega \sqrt{1 - u^2/c^2}$, где частота колебаний ω определяется соотношением (9.42).

Рассмотренная неустойчивость известна под названием циклотронной неустойчивости. Она, так же как и пучковая неустойчивость, имеет резонансный характер и может развиваться только при больших направленных скоростях электронов пучка, когда $u \gg v_{0e}$ и $u > v_{1e} \left(\frac{N_{0e}}{N_{1e}} \right)^{1/3}$.

Следует отметить, однако, что инкремент нарастания циклотронной неустойчивости намного меньше инкремента нарастания пучковой неустойчивости и в реальном эксперименте ее трудно наблюдать.

В заключение настоящего параграфа заметим, что рассмотренные здесь примеры неустойчивостей при взаимодействии электронного пучка малой плотности с плазмой, как отмечалось выше, имеют место только при достаточно больших направленных скоростях электронов.

С другой стороны, можно показать, что возбуждение электромагнитных колебаний в плазме может происходить также и при малых направленных скоростях электронного пучка, меньших, чем тепловые скорости частиц. Так, например, развитие кинетической неустойчивости, связанной с черенковским излучением электромагнитных волн в плазме, должно происходить при скоростях пучка, превышающих фазовую скорость этих волн. В то же время в §§ 6 и 8 было показано, что в плазме могут распространяться волны, фазовые скорости которых меньше тепловой

скорости электронов, но больше тепловой скорости ионов. Поэтому кинетическая неустойчивость, связанная с раскачкой таких колебаний, очевидно, возможна и при скоростях пучка, меньших тепловой скорости электронов. Более того, оказывается, что в плазме достаточно больших размеров возможно развитие пучковой неустойчивости при сколь угодно малых скоростях пучка, меньших, чем тепловые скорости как электронов, так и ионов, которая по своей природе сходна с исследованной выше неустойчивостью плазмы с анизотропной температурой. Интересующегося этими вопросами читателя отошлем к специальной литературе, которая цитируется в монографиях [1—4, 6] (см. также [50, 51]). Отметим лишь, что конкретные вычисления при исследовании устойчивости таких «медленных» пучков также удобно проводить, следуя общему методу, изложенному в начале настоящего раздела. Мы надеемся, что такой метод исследования устойчивости системы плазма — пучок в условиях, когда парными столкновениями можно пренебречь, облегчит читателю ознакомление со все увеличивающимся числом работ, посвященных этой проблеме.

§ 10. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В этом параграфе мы рассмотрим еще один пример пространственно однородной плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям, а именно плазму во внешнем электрическом поле.

Следует отметить, что лабораторную плазму вообще трудно представить себе без электрического поля. Электрическое поле используется как для создания самой плазмы (разряд в газе в постоянном электрическом поле, либо разряд в высокочастотном поле), так и для ее нагрева и удержания (омический нагрев плазмы в постоянном поле, нагрев высокочастотными полями, радиационное удержание и ускорение плазменных сгустков в переменных полях и т. д.). Более того, характер распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в плазме в значительной степени определяется поведением плазмы во внешнем переменном электрическом поле. Очевидно, что описать все многообразие явлений в плазме во внешнем электрическом поле мы здесь не в состоянии.

Это является предметом целого ряда монографий и обзорных статей [52—57, 37] (см. также и обзоры А. А. Веденова, Б. А. Трубникова, Б. Б. Кадомцева, А. А. Иванова, А. А. Галеева и Р. З. Сагдеева в сборниках [7]).

В настоящем параграфе, как отмечалось выше, ограничимся исследованием устойчивости плазмы во внешнем однородном пространстве и постоянном либо переменном во времени электрическом поле $E_0(t)$. Разумеется, такая плазма обладает анизотропной функцией распределения частиц по скоростям, поскольку заряженные частицы под действием внешнего электрического поля будут совершать помимо хаотических тепловых движений также направленное движение вдоль поля (однонаправленное движение при постоянном электрическом поле и колебания в случае высокочастотного поля), вследствие чего распределение частиц по скоростям окажется анизотропным. Такое распределение, как будет показано ниже, в определенных условиях становится неустойчивым и сопровождается возбуждением продольных (потенциальных) колебаний плазмы.

а) Плазма в постоянном электрическом поле. Неустойчивость анизотропной плазмы с током. Анализ устойчивости плазмы во внешнем электрическом поле начнем со случая однородного в пространстве и постоянного во времени поля $E_0 = \text{const}$, параллельного внешнему постоянному и однородному магнитному полю B_0 . Под действием такого поля заряженные частицы плазмы будут ускоряться, причем их скорость к моменту времени t после включения поля будет равна *)

$$u = \frac{eE_0}{m} t. \quad (10.1)$$

Частица будет ускоряться по закону (10.1) до тех пор, пока не столкнется с другой частицей и потеряет набранный в поле импульс, или, что то же самое, пока $t < \nu^{-1}$, где ν — частота столкновений частиц данного сорта. Из-за огромной разницы в массах электронов и ионов воздействием поля на ионы фактически всегда можно пренебречь и учитывать лишь действие электрического поля на электроны плазмы. Поэтому приведенные рассуждения следует

*) Ограничиваемся здесь рассмотрением нерелятивистского движения частиц во внешнем поле E_0 . О поведении плазмы в сильном поле E_0 , когда движение частиц становится релятивистским, см. работу [58].

относить к электронам и, в частности, формула (10.1) также относится именно к электронам плазмы, а под v следует понимать частоту электронных столкновений ν_e .

В течение времени $t < \nu_e^{-1}$ плазму можно считать бесстолкновительной, в которой под действием электрического поля электроны ускоряются по закону (10.1). Функция распределения электронов в такой плазме в момент времени t запишется в виде

$$f_{0e}(v, t) = \frac{N_e}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m(v - u_e)^2}{2T_e}\right), \quad (10.2)$$

если при $t \leq 0$ она имела вид изотропного распределения Максвелла (5.1). Легко показать, что распределение (10.2) удовлетворяет кинетическому уравнению с самосогласованным полем (3.16):

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial t} + \frac{eE_0}{m} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} = 0. \quad (10.3)$$

Функция распределения электронов сохраняет вид (10.2) и для времен $t > \nu_e^{-1}$, если только направленная скорость, набранная электронами за время свободного пролета, т. е. за время порядка ν_e^{-1} , меньше их тепловой скорости. В этом случае под действием электрического поля электроны плазмы приобретают стационарную скорость дрейфа, равную

$$u_e = \frac{eE_0}{m\nu_e}, \quad (10.4)$$

где $\nu_e = \nu_{en}$ — в случае слабоионизованной плазмы и $\nu_e = \nu_{эфф}/1,96$ — для полностью ионизованной плазмы. В этом можно убедиться путем подстановки распределения (10.2) в приведенное в § 4 кинетическое уравнение для электронов с учетом столкновений.

Согласно сказанному распределение (10.2) со стационарной направленной скоростью (10.4) имеет место, если $u_e < v_{Te}$, или *)

$$E_0 < E_{кр} = \frac{m\nu_e}{e} v_{Te}. \quad (10.5)$$

Если же $E > E_{кр}$, то набираемая электронами за время

*) В случае полностью ионизованной плазмы это утверждение справедливо при условии пренебрежения явлением «убегания» электронов (подробно об этом явлении см. работы [59]).

свободного пролета скорость оказывается больше их тепловой скорости; столкновения частиц при этом уже не могут затормозить их ускорение в электрическом поле. В результате распределение электронов будет иметь вид (10.2), но с нестационарной направленной скоростью (10.4).

Теперь, когда известны функции распределения заряженных частиц, мы можем перейти к исследованию устойчивости плазмы, помещенной во внешнее постоянное электрическое поле. Поскольку в найденном равновесном состоянии все электроны дрейфуют относительно покоящихся ионов с некоторой скоростью u_e , то для решения задачи устойчивости можем воспользоваться общим методом, изложенным в предыдущем параграфе. Это, однако, предполагает стационарность скорости дрейфа электронов за время развития неустойчивости, что, как показывается ниже, оправдано вследствие очень большого инкремента развития неустойчивости при $u_e > v_{Te}$.

В отсутствие внешнего магнитного поля дисперсионное уравнение (9.32) для случая бесстолкновительной плазмы и нерелятивистских скоростей дрейфа электронов, $u_e \ll c$, записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega - u_e k}{k v_{Te}} \right) \right] + \frac{\omega_{Ni}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{Ti}} \right) \right] = 0. \quad (10.6)$$

При $u_e = 0$ уравнение (10.6) совпадает с дисперсионным уравнением для продольных волн в изотропной плазме, которое было подробно исследовано в § 6. В этом случае, естественно, никаких неустойчивостей нет. Выясним, возникают ли неустойчивости при $u_e \neq 0$. Предположим вначале, что $u_e < v_{Te}$. Легко показать, что в этом случае неустойчивыми могут быть колебания лишь в области частот $k v_{Ti} \ll \omega \ll k v_{Te}$, в которой уравнение (10.6) принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Ne}^2 (\omega - u_e k)}{k^3 v_{Te}^3} = 0. \quad (10.7)$$

Учитывая малость мнимой части, находим отсюда следующий спектр колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Ni}^2}{1 + \omega_{Ne}^2 / k^2 v_{Te}^2}, \quad \gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{m} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3} \left(1 - \frac{u_e}{v_\Phi} \cos \theta \right), \quad (10.8)$$

где $v_\phi = \omega/k$ — фазовая скорость волн, а θ — угол между скоростью электронов u_e и направлением распространения волн k , т. е. $\cos \theta = ku_e/kv_\phi$. При $u_e = 0$ этот спектр совпадает со спектром ионно-звуковых колебаний изотропной неизотермической плазмы, в которой $T_e \gg T_i$ (см. § 6). Отличная от нуля скорость электронов u_e , как видно из выражения (10.8), приводит к уменьшению декремента затухания γ для волн, распространяющихся под острым углом к скорости u_e , а при $u_e > v_\phi/\cos \theta$ меняет знак γ , т. е. приводит к неустойчивости плазмы. Неустойчивость при этом обусловлена черенковским возбуждением ионно-звуковых волн движущимися электронами плазмы. Она возможна лишь в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) *) при $u_e > v_\phi \gg v_{Ti}$.

Если скорость электронов $u_e > v_{Te}$, то, наряду с рассмотренной ионно-звуковой неустойчивостью, в плазме может развиваться чисто гидродинамическая пучковая неустойчивость, не связанная с диссипативными эффектами в плазме. Действительно, в области частот $\omega \gg kv_{Te}$ из уравнения (10.6) получаем

$$1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{(\omega - u_e k)^2} - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} = 0. \quad (10.9)$$

Это уравнение имеет решения, соответствующие неустойчивым колебаниям, только при условии $\omega \ll u_e k$, причем

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{Ni}^2}{1 - \omega_{Ne}^2/(u_e k)^2} \quad \text{при } (u_e k)^2 \neq \omega_{Ne}^2, \\ \omega_{1,2} &= \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} u_e k, \\ \omega_3 &= \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} u_e k \end{aligned} \right\} \quad \text{при } (u_e k)^2 \approx \omega_{Ne}^2. \quad (10.10)$$

Отсюда видно, что в области $(u_e k)^2 \lesssim \omega_{Ne}^2$ всегда имеются решения, для которых $\text{Im } \omega > 0$, что соответствует неустойчивости плазмы с аperiodическим нарастанием колебаний с инкрементом $\text{Im } \omega = \gamma \lesssim \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} \omega_{Ne}$. Рассмотренная высокочастотная неустойчивость плазмы во внешнем

*) Рассмотренная ионно-звуковая неустойчивость имеет место и в столкновительной плазме с током при $u_e \gg v_{Ti}$, которая в результате омического нагрева электронов в этих условиях всегда оказывается сильно неизотермической (см. [1], § 38). Более подробно с ионно-звуковой неустойчивостью анизотропной плазмы с током можно познакомиться по обзору [60].

электрическом поле известна под названием неустойчивости Бунемана [61].

На рис. 11 показана зависимость инкремента развития бунемановской и ионно-звуковой неустойчивости от $u_e k$. В области $kv_{Ti} < |u_e k| < kv_{Te}$ возможно развитие лишь

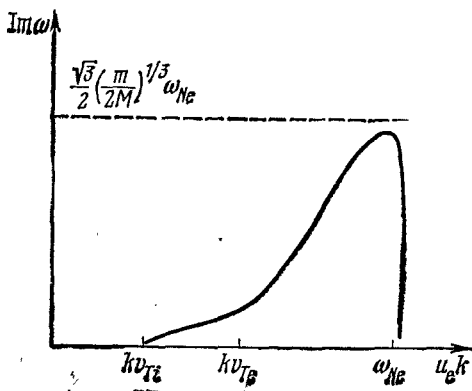


Рис. 11. Зависимость инкремента развития неустойчивости плазмы в электрическом поле от $u_e k$.

ионно-звуковой неустойчивости в неизотермической ($T_e \gg \gg T_i$) плазме, в то время как в области $kv_{Te} < |u_e k| < \omega_{Ne}$ может развиваться также и пучковая неустойчивость со значительно большим инкрементом нарастания колебаний.

Выясним теперь, как влияет на исследованную выше неустойчивость плазмы в электрическом поле внешнее продольное (параллельное электрическому полю и направленное вдоль оси z) магнитное поле. Дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний плазмы (9.32) при наличии магнитного поля записывается в виде (см. (7.22))

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 - \sum_s \frac{\omega - u_e k}{\omega - u_e k - s\omega_{Be}} A_s \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\omega_{Be}^2} \right) \times \right. \\ \left. \times J_+ \left(\frac{\omega - u_e k - s\omega_{Be}}{k_z v_{Te}} \right) \right] + \frac{\omega_{Ni}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\omega_{Bi}} \times \right. \\ \left. \times A_s \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega - s\omega_{Bi}}{k_z v_{Ti}} \right) \right] = 0. \quad (10.11)$$

Прежде всего отметим, что при $|\omega - u_e k| \gg \omega_{Be}$ и $\omega \gg \gg \omega_{Bi}$ (т. е. при $B_0 \rightarrow 0$) уравнение (10.11) переходит в (10.6), полученное в отсутствие магнитного поля. Поэтому в этом пределе остаются справедливыми все полученные выше результаты. Эти результаты сохраняют силу также и при $k_{\perp} = 0$, так как при этом уравнение (10.11) совпадает с (10.6). Таким образом, влияния магнитного поля на неустойчивость плазмы во внешнем электрическом поле следует ожидать лишь в области низких частот $\omega_{Be} \gg |\omega - u_e k|$ и для колебаний с $k_{\perp} \neq 0$. Для простоты, кроме того, будем считать, что $k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 \ll \omega_{Bi}^2$, т. е. рассмотрим колебания с поперечной длиной волны, значительно превышающей ларморовский радиус ионов.

Рассмотрим вначале случай $u_e < v_{Te}$. Можно показать, что в этом случае неустойчивыми могут быть лишь колебания в области частот $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$, в которой уравнение (10.11) имеет вид

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - u_e k}{|k_z| v_{Te}} \right) - \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} = 0. \quad (10.12)$$

Учитывая малость мнимого диссипативного слагаемого в этом уравнении, обусловленного черенковским эффектом на электронах, находим следующий спектр колебаний плазмы ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$):

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{Bi}^2 + \frac{\omega_{Ni}^2}{1 + \omega_{Ne}^2/k^2 v_{Te}^2} \pm \sqrt{\left(\omega_{Bi}^2 + \frac{\omega_{Ni}^2}{1 + \omega_{Ne}^2/k^2 v_{Te}^2} \right)^2 - \frac{4\omega_{Bi}^2 \omega_{Ni}^2 \cos^2 \theta}{1 + \omega_{Ne}^2/k^2 v_{Te}^2}} \right\}, \quad (10.13)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{M}{m} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Te}^3 |\cos^3 \theta|} \left(1 - \frac{u_e \cos \theta}{v_{\Phi}} \right) \times \times \left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_{Bi}^2)^2} \right)^{-1},$$

где $v_{\Phi} = \omega/k$, а $\cos \theta = k u_e / k u_e$. При $u_e = 0$ этот спектр совпадает со спектром затухающих ($\gamma < 0$) ионно-звуковых колебаний неизотермической ($T_e \gg T_i$) магнитоактивной плазмы (две ветви (10.11) описывают колебания в области частот $\omega > \omega_{Bi}$ и $\omega < \omega_{Bi}$, см. § 8). С ростом

u_e затухание волны уменьшается и при $u_e > v_\phi \cos \theta \gg v_{Ti}$ оно сменяется на раскачку, т. е. $\gamma > 0$. Условие раскачки ионно-звуковых колебаний имеет такой же вид, как и в отсутствие внешнего магнитного поля. Более того, инкремент нарастания (10.13) — порядка инкремента (10.8) для плазмы без магнитного поля. Таким образом, на ионно-звуковую неустойчивость плазмы с током, развивающуюся при $u_e < v_{Te}$, магнитное поле практически никакого влияния не оказывает.

Несколько иное положение имеет место для гидродинамической пучковой неустойчивости, развивающейся при $u_e > v_{Te}$. Такая неустойчивость возможна в области частот $\omega \gg k_z v_{Te}$, причем дисперсионное уравнение (10.11) записывается в виде (напомним, что $|\omega - u_e k| \ll \omega_{Be}$)

$$1 - \frac{\omega_{Ne}^2 \cos^2 \theta}{(\omega - u_e k)^2} - \frac{\omega_{Ni}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} - \frac{\omega_{Ni}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} = 0. \quad (10.14)$$

Проанализируем это уравнение при $\omega < \omega_{Bi}$ и $\omega > \omega_{Bi}$. Легко показать, что решения, соответствующие неустойчивым колебаниям, возможны лишь при условии $\omega \ll u_e k$, причем:

$$\text{при } u_e k \neq \eta \frac{\omega_{Ne}^2}{a}$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Ni}^2}{a - \eta \omega_{Ne}^2 / (u_e k)^2};$$

$$\text{при } u_e k \approx \eta \frac{\omega_{Ne}^2}{a} \quad (10.15)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm i \sqrt{3}}{2} \left(\frac{\eta}{2} \frac{m}{M} \right)^{1/3} u_e k,$$

$$\omega_3 = \left(\frac{\eta}{2} \frac{m}{M} \right)^{1/3} u_e k,$$

где

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \gg \omega_{Bi}, \\ \cos^2 \theta & \text{при } \omega \ll \omega_{Bi}, \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \gg \omega_{Bi}, \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(1 + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} \sin^2 \theta \right) & \text{при } \omega \ll \omega_{Bi}. \end{cases}$$

Полученные выражения аналогичны (10.10). Здесь, так же как в отсутствие внешнего магнитного поля, неустойчивыми являются длинноволновые колебания, для которых $(u_e k)^2 \lesssim \eta \omega_{Ne}^2/a$ *). Однако, учитывая, что $\eta \leq 1$, а $a \geq 1$, заключаем, что магнитное поле, вообще говоря, сужает область неустойчивости плазмы. Более того, оно приводит к уменьшению инкремента развития неустойчивости, который при наличии магнитного поля имеет порядок

$$\text{Im } \omega = \gamma \lesssim \left(\frac{\eta}{2} \frac{m}{M} \right)^{1/2} u_e k.$$

Следует заметить, что стабилизирующее действие магнитное поле оказывает лишь на колебания в области

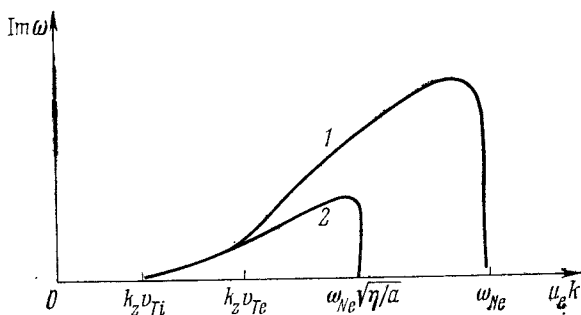


Рис. 12. Зависимость инкремента развития неустойчивости магнитоактивной плазмы в электрическом поле от $u_e k$.

частот $|\omega - u_e k| \ll \omega_{Be}$ и при $k_{\perp} \neq 0$. Это означает что реально оно имеет место лишь в случае очень сильных полей, когда $\omega_{Be} > \omega_{Ne}$. На рис. 12 качественно показано стабилизирующее действие магнитного поля на неустойчивость плазмы во внешнем электрическом поле: кривая 1 относится к случаю $k_{\perp} = 0$ (когда магнитное поле не влияет на неустойчивость), а кривая 2 — к случаю $k_{\perp} \neq 0$ и $\omega_{Be} > \omega_{Ne}$.

В заключение еще раз подчеркнем, что рассмотренные нами неустойчивости плазмы во внешнем постоянном

*) Заметим, что обратное условие $(u_e k)^2 \geq \eta \omega_{Ne}^2/a$ — условие устойчивости, определяет предельный ток в электронном пучке, заряд которого скомпенсирован ионами (см. обзор [62], где можно найти также обобщение теории неустойчивости Бунемана на случай релятивистских электронных пучков).

электрическом поле охватывают лишь малую часть неустойчивостей плазмы с током, которые в последние годы привлекают особое внимание исследователей в связи с проблемой нагрева плазмы для достижения термоядерных температур. Для более подробного знакомства с такими неустойчивостями рекомендуем монографию [6].

б) Плазма в сильном высокочастотном поле. Параметрическая неустойчивость. Рассмотрим теперь поведение плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле, изменяющемся во времени по закону $E_0(t) = E_0 \sin \omega_0 t$, причем будем считать, что $\omega_0 \gg \nu_e$ (в противном случае поле можно считать квазистатическим и применимы полученные выше результаты). Равновесная функция распределения электронов в таком поле также запишется в виде (10.2), где под u_e следует понимать скорость осцилляции электронов

$$u_e = - \frac{eE_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (10.16)$$

Анализ устойчивости плазмы во внешнем высокочастотном поле проведем на примере продольных (потенциальных) колебаний, ограничиваясь для простоты пределом бесстолкновительной плазмы. Систему линеаризованных кинетических уравнений для отклонений функций распределений электронов и ионов от равновесных запишем при этом в виде

$$\frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + ikv \delta f_e - ik \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} \frac{4\pi e}{mk^2} \left(e \int dp \delta f_e + e_i \int dp \delta f_i \right) + \frac{e}{m} E_0 \sin \omega_0 t \frac{\partial \delta f_e}{\partial v} = 0, \quad (10.17)$$

$$\frac{\partial \delta f_i}{\partial t} + ikv \delta f_i - ik \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \frac{4\pi e_i}{Mk^2} \left(e \int dp \delta f_e + e_i \int dp \delta f_i \right) = 0.$$

Здесь мы пренебрегли воздействием высокочастотного электрического поля на ионы плазмы, считая равновесную функцию распределения ионов f_{0i} изотропной (максвелловской), и воспользовались уравнением Пуассона для потенциала поля колебаний

$$-\Delta \Phi = k^2 \Phi = 4\pi \left(e \int dp \delta f_e + e_i \int dp \delta f_i \right). \quad (10.18)$$

Путем замены переменных

$$\Psi_e = \exp \left(-i \frac{e}{m} \frac{kE_0}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t \right) \delta f_e \left(v + \frac{eE_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \right) \quad (10.19)$$

систему уравнений (10.17) сведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_e}{\partial t} + i k v \Psi_e - i k \frac{\partial f_{0e}}{\partial v} \frac{4\pi e}{m k^2} \left\{ e \int d p \Psi_e \times \right. \\ \left. \times \exp \left(- i \frac{e k E_0}{m \omega_0^2} \sin \omega_0 t \right) + e_i \int d p \delta f_i \right\} = 0, \\ \frac{\partial \delta f_i}{\partial t} + i k v \delta f_i - i k \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \frac{4\pi e_i}{M k^2} \left\{ e \int d p \Psi_e \times \right. \\ \left. \times \exp i \frac{e k E_0}{m \omega_0^2} \sin \omega_0 t + e_i \int d p \delta f_i \right\} = 0. \end{aligned} \quad (10.20)$$

В (10.20) как $f_{0i}(v)$, так и $f_{0e}(v)$ — изотропные распределения Максвелла.

Воспользовавшись известным разложением

$$e^{\pm i k r_E \sin \omega_0 t} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{\pm i l \omega_0 t} J_l(k r_E), \quad (10.21)$$

где $r_E = \frac{e E_0}{m \omega_0^2}$ — амплитуда осцилляций электронов во внешнем высокочастотном электрическом поле, можно показать, что система (10.20) — это система уравнений с периодическими коэффициентами. Решение этой системы следует искать в виде

$$(\Psi_e, \delta f_i) = e^{-i \omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i n \omega_0 t} (\Psi_{en}, \delta f_{in}). \quad (10.22)$$

В результате из (10.20) получаем систему интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{aligned} \Psi_{en} + \frac{4\pi e}{m k^2} \frac{k \frac{\partial f_{0e}}{\partial v}}{\omega + n \omega_0 - k v} \left[e \int d p \Psi_{en} + \right. \\ \left. + e_i \sum_l J_{n-l}(k r_E) \int d p \delta f_{il} \right] = 0, \\ \delta f_{in} + \frac{4\pi e_i}{M k^2} \frac{k \frac{\partial f_{0i}}{\partial v}}{\omega + n \omega_0 - k v} \left[e \sum_l J_{l-n}(k r_E) \int d p \Psi_{el} + \right. \\ \left. + e_i \int d p \delta f_{in} \right] = 0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Вводя обозначения

$$u_{en} = e \int d\mathbf{p} \Psi_{en}, \quad u_{in} = e_i \int d\mathbf{p} \delta f_{in} \quad (10.24)$$

и интегрируя уравнения (10.23) по импульсу, получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} u_{en} [1 + \delta\varepsilon_e(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})] + \\ + \delta\varepsilon_e(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k}) \sum_l J_{n-l}(\mathbf{k}r_E) u_{il} = 0, \\ u_{in} [1 + \delta\varepsilon_i(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})] + \\ + \delta\varepsilon_i(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k}) \sum_l J_{l-n}(\mathbf{k}r_E) u_{el} = 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Здесь $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$ — вклады в продольную диэлектрическую проницаемость изотропной плазмы, обусловленные электронами и ионами соответственно (см. (5.8) и (5.9)):

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e_\alpha^2}{m_\alpha k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right) \right], \quad (10.26)$$

где $\alpha = e, i$.

Условие разрешимости бесконечной системы алгебраических уравнений (10.25) представляет собой искомого дисперсионное уравнение для малых продольных (потенциальных) колебаний плазмы, находящейся во внешнем высокочастотном электрическом поле. В общем случае этот определитель бесконечного порядка, проанализировать который весьма трудно. Однако в предельных случаях, представляющих наибольший интерес, систему (10.25) удастся упростить и получить относительно простые дисперсионные уравнения. Так, например, в условиях, когда ω_0 больше всех характерных частот плазмы — в данном случае ленгмюровских частот электронов и ионов (т. е. $\omega_0 \gg \omega_{Ne}, \omega_{Ni}$), все величины $\delta\varepsilon_\alpha(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})$ с $n \neq 0$ малы по сравнению с единицей. Поэтому в системе (10.25) отличными от нуля в первом приближении можно считать лишь u_{e0} и u_{i0} . В результате система сильно упрощается и условие ее разрешимости принимает вид

$$\begin{aligned} 1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) + \\ + [1 - J_0^2(\mathbf{k}r_E)] \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Это и есть дисперсионное уравнение продольных колебаний плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле при $\omega_0 \gg \omega_{Ne}$.

В отсутствие высокочастотного поля, когда $r_E \rightarrow 0$, уравнение (10.27) переходит в уравнение (6.2), подробно исследованное в § 6. Внешнее высокочастотное поле не только меняет спектры продольных колебаний, существующих и в отсутствие поля, но также приводит к появлению новых ветвей. Так, в пределе холодной плазмы, когда $\omega \gg kv_{T\alpha}$, из уравнения (10.27) получаем

$$1 - \frac{\omega_{Ne}^2 + \omega_{Ni}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Ne}^2 \omega_{Ni}^2}{\omega^4} [1 - J_0^2(kr_E)] = 0. \quad (10.28)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_{Ne}^2 + \omega_{Ni}^2 J_0^2(kr_E), \\ \omega_2^2 &= \omega_{Ni}^2 [1 - J_0^2(kr_E)]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Первый из этих спектров представляет собой спектр известных высокочастотных плазменных колебаний холодной плазмы (см. § 6), слегка видоизмененный под действием внешнего высокочастотного поля. Второй же спектр является новым; он аналогичен спектру ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы (см. § 6), причем роль температуры электронов играет средняя энергия их колебательного движения в высокочастотном поле. Особенно явно это видно в длинноволновом пределе, $kr_E \ll 1$, когда этот спектр принимает вид

$$\omega_2^2 = \omega_{Ni}^2 \frac{(kr_E)^2}{2} = (kw_s)^2. \quad (10.30)$$

Здесь $w_s = \frac{\omega_{Ni}}{\omega_0} \frac{V_E}{\sqrt{2}}$, где $V_E = \frac{eE_0}{m\omega_0}$ — амплитуда скорости осцилляций электронов во внешнем поле. Таким образом, можно говорить о существовании анизотропных электрозвуковых колебаний в плазме, помещенной во внешнее высокочастотное электрическое поле, понимая под скоростью такого звука величину w_s . Отметим, что электрозвуковые колебания возможны только в достаточно сильных электрических полях, когда $w_s \gg v_{Te}$ или, что то же самое, $V_E \gg \sqrt{\frac{M}{m}} v_{Te}$. Спектры частот (10.29) в зависимости от kr_E изображены на рис. 13 кривыми 1 и 2 соответственно.

Внешнее высокочастотное поле влияет и на спектр ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$. Действительно, в области частот $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ из уравнения (10.27) получаем

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) [1 - J_0^2(kr_E)] = 0. \quad (10.31)$$

Здесь мы полностью пренебрегли тепловым движением

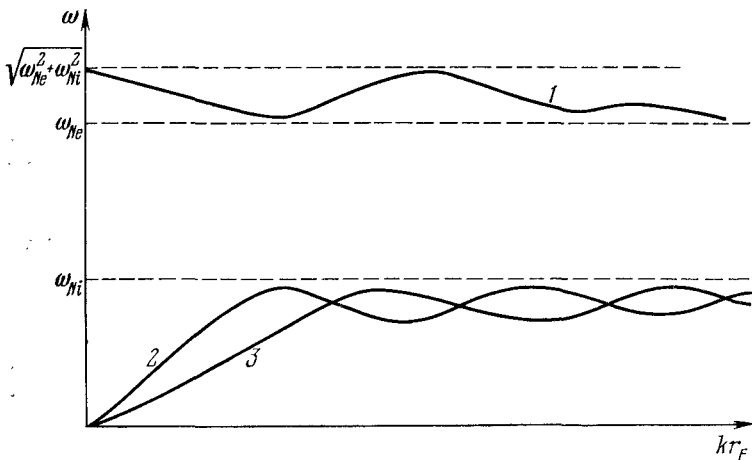


Рис. 13. Спектры колебаний плазмы во внешнем высокочастотном поле.

ионов, в том числе и затуханием волн на ионах плазмы. Из (10.31) находим ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$)

$$\omega^2 = \omega_{Ni}^2 \left[1 - \frac{J_0^2(kr_E)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right], \quad (10.32)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}^2 \omega_{Ni}^2 J_0^2(kr_E)}{k^3 v_{Te}^3 (1 + 1/k^2 r_{De}^2)}.$$

В пределе длинных волн, когда $kr_E \ll 1$, и $k^2 r_{De}^2 \ll 1$, спектр ионно-звуковых колебаний (10.32) принимает

простой вид (ср. с. (6.15))

$$\begin{aligned}\omega^2 &= (k w_s)^2 + k^2 v_s^2, \\ \gamma &= -\sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m}{M} Z k v_s}.\end{aligned}\quad (10.33)$$

Отсюда видно, что под действием внешнего высокочастотного поля изменилась фазовая скорость ионно-звуковых колебаний, в то время как декремент их затухания остался практически неизменным. Спектр частот (10.32) представлен на рис. 13 кривой 3.

В рассмотренном выше примере колебания плазмы во внешнем высокочастотном поле оказались устойчивыми. Этого и следовало ожидать, поскольку частота внешнего поля ω_0 считалась намного больше всех характерных частот плазмы. Иное положение имеет место в условиях, когда частота ω_0 близка или кратна плазменной частоте ω_{Ne} . В этом случае между полем и плазмой возможно резонансное или, как говорят, параметрическое взаимодействие и в плазме может развиваться неустойчивость даже при малых напряженностях внешнего высокочастотного поля. Чтобы убедиться в этом, будем считать частоту ω_0 близкой к ω_{Ne} , а скорость осцилляций электронов значительно меньшей их тепловой скорости (таким образом считаем, что $V_E \ll v_{Te}$). В этих условиях $kr_E \ll 1$ и в системе (10.25) достаточно ограничиться слагаемыми с $n, l = 0, \pm 1$. В результате эта система сильно упрощается, а условие ее разрешимости принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{1 + \delta\varepsilon_e(\omega, k) + \delta\varepsilon_i(\omega, k)}{\delta\varepsilon_i(\omega, k) [1 + \delta\varepsilon_e(\omega, k)]} + \\ + \frac{(kr_E)^2}{4} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega + \omega_0, k)} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - \omega_0, k)} \right] = 0.\end{aligned}\quad (10.34)$$

При выводе этого соотношения, представляющего собой дисперсионное уравнение продольных колебаний плазмы в слабом высокочастотном поле в условиях параметрического резонанса, т. е. при $\omega_0 \approx \omega_{Ne}$, предполагалось, что $\omega \ll \omega_0$, а поэтому диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon(\omega \pm \omega_0, k) \ll 1$.

Переходя к анализу уравнения (10.34), прежде всего рассмотрим область малых фазовых скоростей $\omega/k \ll v_{Ti}$. Считая длину волны колебаний значительно больше дебаевского радиуса плазмы, $kr_D \ll 1$, из уравнения (10.34)

при этом получаем

$$k^2 r_{Di}^2 \left(1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Ti}} \right) + k^2 r_{De}^2 \left(1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) + \frac{(kr_E)^2}{2} \frac{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_{Ne}^2)}{(\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2)^2 - 4\omega_0^2 \omega^2} = 0. \quad (10.35)$$

При написании этого соотношения мы пренебрегли мнимой частью диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega \pm \omega_0, k)$, обусловленной столкновениями электронов, что эквивалентно требованию $|\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2| \gg \omega_0 v_e$. Если, кроме того, принять, что

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2} \ll \frac{\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2 + \eta \omega_0^2}{\omega_0^2}, \quad \eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{8\pi N_e (T_e + T_i)}, \quad (10.36)$$

где θ — угол между направлением распространения волны и внешним высокочастотным полем, то из (10.35) найдем

$$\omega = i \frac{\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2 + \eta \omega_0^2}{\eta \omega_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k v_{Ti} \frac{T_e + T_i}{T_i}. \quad (10.37)$$

Из условия $\omega \ll k v_{Ti}$ следует, что спектр (10.37) справедлив только тогда, когда $\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2 + \eta \omega_0^2 \ll \eta \omega_0^2$, а это означает, что неустойчивость, описываемая этим спектром, возможна если $\omega_0^2 < \omega_{Ne}^2$. Условие пренебрежения столкновениями электронов при этом накладывает определенное требование на величину напряженности внешнего высокочастотного поля, а именно

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{8\pi N_e (T_e + T_i)} > \frac{v_e}{\omega_0}, \quad (10.38)$$

где под v_e следует подразумевать v_{en} в случае слабоионизованной плазмы и $v_{эфф}$ — для полностью ионизованной плазмы.

Неравенство (10.38), по существу, определяет порог напряженности внешнего высокочастотного поля, выше которого в плазме с $T_i \gtrsim T_e$ возникает рассмотренная выше параметрическая неустойчивость. В сильно неизо-термической плазме с $T_e \gg T_i$, в которой возможно существование ионно-звуковых колебаний, такой порог оказывается еще ниже. Действительно, в области частот

ионно-звуковых колебаний, $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$, и при условии $k^2 r_{De}^2 \ll 1$ уравнение (10.34) принимает вид

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Ni}^2} + k^2 r_{De}^2 \left(1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) + \frac{(kr_E)^2}{4} \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2)}{(\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2)^2 - 4\omega^2 \omega_0^2} = 0. \quad (10.39)$$

Отсюда видно, что при условии *)

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 = (\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2)^2 \quad (10.40)$$

в плазме происходит раскочка ионно-звуковых колебаний с инкрементом нарастания

$$\gamma = \frac{\omega_0^2 - \omega_{Ne}^2}{16\omega^2} \frac{(kr_E)^2}{k^2 r_{De}^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} kv_{Te}. \quad (10.41)$$

Неустойчивость возникает при $\omega_0^2 > \omega_{Ne}^2$, причем из условия пренебрежения столкновениями электронов в диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k})$ следует, что $\gamma > v_e$, или, что то же самое,

$$\eta = \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{8\pi N_e T_e} > \sqrt{8\pi \frac{m}{M} \frac{v_e}{\omega_0}}. \quad (10.42)$$

Порог, определяемый этим неравенством, значительно ниже, чем (10.38).

Рассмотренные выше неустойчивости составляют лишь малую долю параметрических неустойчивостей плазмы во внешнем высокочастотном поле даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Так, с ростом напряженности внешнего электрического поля, при значительном превышении порогов (10.38) и (10.42) проявляются неустойчивости на кратных частотах, $\omega_0 = n\omega_{Ne}$, инкременты нарастания которых много больше (10.37) и (10.41). При наличии внешнего магнитного поля параметрические неустойчивости проявляются при частотах ω_0 , близких или кратных

*) Условие (10.40) означает, что $\omega_0 = \omega_{Ne} + kv_s$, т. е. частота внешнего поля равна сумме частот ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний. На языке нелинейной электродинамики плазмы [55, 57] при этом возможен распад внешней волны на ленгмюровские и ионно-звуковые волны. Именно так и трактуется рассмотренная параметрическая неустойчивость в [56, 63].

собственным частотам замагниченной плазмы, и картина параметрических неустойчивостей становится еще более многообразной. Рассмотрение всех этих вопросов выходит далеко за пределы настоящей монографии (см. [56, 63] и указанную там литературу).

§ 11. ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ)

До сих пор речь шла о пространственно однородной плазме. В реальных лабораторных условиях, однако, плазма всегда неоднородна. Неоднородна также и ионосферная плазма. Из таблиц I—III видно, что характерный размер регулярной неоднородности для плотности числа частиц в ионосферной плазме порядка $L_N \sim 100 \text{ км} = 10^7 \text{ см}$, размер неоднородности температуры частиц $L_T \sim 5 \cdot 10^7 \text{ см}$ и, наконец, размер неоднородности магнитного поля Земли $L_B \sim 10^8\text{—}10^9 \text{ см}$. В плазме газового разряда (см. табл. IV) характерный размер неоднородности плотности плазмы определяется радиусом разрядной трубки и обычно составляет $L_N \sim 1\text{—}3 \text{ см}$, причем, как правило, $L_T \gg L_N$. В высокотемпературной же плазме, удерживаемой сильным магнитным полем в установках для управляемого термоядерного синтеза, $L_N \sim L_T \sim (1\text{—}10) \text{ см}$, а $L_B \gg L_N$.

В неоднородной плазме ядра материальных уравнений (1.14) $\tilde{\epsilon}_{ij}$ и $\hat{\epsilon}_{ij}$ уже не являются разностными функциями координат \mathbf{r} и \mathbf{r}' , т. е. зависят не только от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, но и от \mathbf{r} и \mathbf{r}' в отдельности. Для описания электромагнитных свойств неоднородной плазмы нельзя поэтому в общем случае пользоваться понятием тензора диэлектрической проницаемости в том смысле, как оно определено соотношением (1.16). Это обстоятельство существенно усложняет построение теории распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме. С другой стороны, ясно, что при рассмотрении колебаний с длиной волны, значительно меньшей характерного размера неоднородности плазмы, можно надеяться на упрощение теории, как это имеет место в приближении геометрической оптики [8] *).

*) Нужно иметь также в виду, что пространственной дисперсией плазмы в ряде случаев можно пренебречь; при этом ядра $\tilde{\epsilon}_{ij}$ и $\hat{\epsilon}_{ij}$ заменяются δ -функциями от координат, или, иными словами, их зависимость от \mathbf{r} и \mathbf{r}' вообще несущественна.

Упрощение теории в случае применимости приближения геометрической оптики объясняется существованием малого в таких условиях параметра

$$\frac{\lambda}{L_0} \ll 1, \quad (11.1)$$

где λ — длина волны колебаний в направлении неоднородности плазмы, а L_0 — характерный размер неоднородности. Для таких колебаний плазма почти однородна, и поэтому мы будем говорить о слабонеоднородной плазме.

При изучении свойств слабонеоднородной плазмы материальное уравнение (1.14) удобно переписать в виде *)

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\epsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'). \quad (11.2)$$

Говоря о слабой неоднородности плазмы, мы должны считать, что зависимость ядра интегрального соотношения (11.2) от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ является более резкой, чем зависимость от координаты \mathbf{r} , поскольку первая определяется свойствами пространственной дисперсии плазмы, зависящей от длины волны колебаний, а вторая — неоднородность самой плазмы.

Как это обычно делается в геометрической оптике, представим электромагнитное поле в неоднородной плазме в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t + i\Psi(\mathbf{r})}. \quad (11.3)$$

Здесь введен эйконал $\Psi(\mathbf{r})$. В пространственно однородной плазме $\Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\mathbf{r}$, где волновой вектор $\mathbf{k} = \text{const}$ (т. е. не зависит от координат) и определяется из дисперсионного уравнения (2.13) как функция частоты и параметров плазмы. По аналогии с однородной плазмой можно определить функцию

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla\Psi(\mathbf{r}). \quad (11.4)$$

В слабонеоднородной плазме $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ является медленно меняющейся функцией \mathbf{r} , которая, очевидно, определяется изменением свойств плазмы в пространстве, в силу чего характерный размер неоднородности функции $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ совпадает с L_0 . Векторную функцию $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ в случае слабого

*) Свойства плазмы во времени здесь, так же как и раньше, считаем однородными.

поглощения мы будем называть волновым вектором, а величину $\lambda = 2\pi/k$ — длиной волны колебаний.

Слабая зависимость волнового вектора от координат как раз и позволяет построить метод решения электродинамических задач для слабонеоднородных сред в виде ряда последовательных приближений по параметру (11.1), который называется методом геометрической оптики. Этот метод заключается в следующем: в нулевом приближении полностью пренебрегают пространственными производными $\mathbf{k}(\mathbf{r})$, в первом приближении учитывают лишь первые пространственные производные волнового вектора и т. д. Таким способом, очевидно, можно найти решения уравнений поля с любой степенью точности. Существенно отметить, что при определении эйконала $\Psi(\mathbf{r})$ путем интегрирования соотношения (11.4) необходимо учитывать неоднородность $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ даже в нулевом приближении геометрической оптики, так как область интегрирования, вообще говоря, может значительно превосходить размер неоднородности плазмы.

Ниже мы будем решать уравнения поля в отсутствие внешних источников, что соответствует задаче о собственных электромагнитных колебаниях неоднородной среды.

Подставляя выражение (11.3) в соотношение (11.2) и в уравнения поля (1.6), в нулевом приближении геометрической оптики получим

$$\begin{aligned} \mathbf{kD} &= 0, & [\mathbf{kB}] &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \\ [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, & \mathbf{kB} &= 0, \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$D_i = \exp(-i\omega t + i\Psi(\mathbf{r})) \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) E_j(\omega), \quad (11.6)$$

где (ср.с (1.16))

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{R} \hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}}. \quad (11.7)$$

Формула (11.7) аналогична (1.16). Именно поэтому величину, определяемую этой формулой, обычно называют тензором диэлектрической проницаемости слабонеоднородной среды.

Условие разрешимости системы (11.5) имеет вид

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \right| = 0. \quad (11.8)$$

Это уравнение хотя и аналогично уравнению (2.13), но принципиально отличается от него. Дело в том, что уравнение (2.13) представляет собой дисперсионное уравнение, определяющее спектр собственных электромагнитных колебаний однородной среды $\omega(\mathbf{k})$. Если же уравнение (11.8) разрешить относительно ω , то в случае неоднородной среды получим функцию $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, зависящую от координат. Очевидно, что такая функция не может характеризовать собственные частоты колебаний среды, так как последние не должны зависеть от координат \mathbf{r} . Уже отсюда следует, что уравнение (11.8) в случае неоднородной среды не является дисперсионным уравнением, определяющим спектр собственных значений ω .

Уравнение (11.8), так же как и соответствующее дисперсионное уравнение для однородной среды, можно анализировать в двух постановках задачи. Первая из них (граничная задача) состоит в том, что частота поля ω считается заданной вещественной величиной, а определению подлежит пространственное распределение полей, т. е. эйконал $\Psi(\mathbf{r})$. При такой постановке задачи уравнение (11.8) следует рассматривать как уравнение для определения $\Psi(\mathbf{r})$, т. е. уравнение эйконала. Именно с такой задачей мы встречаемся в теории распространения радиоволн в геометрической оптике. При этом, однако, пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости обычно не учитывается, т. е. считается $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$. Уравнение (11.8) позволяет учесть зависимость тензора ϵ_{ij} также и от \mathbf{k} и в этом смысле обобщает обычное уравнение эйконала в геометрической оптике на случай сред с пространственной дисперсией [64].

Ниже мы не будем подробно останавливаться на обсуждении задач в такой постановке, связанной с нахождением $\Psi(\mathbf{r})$ при заданной частоте ω . Такие задачи применительно к теории распространения радиоволн в плазме при отсутствии пространственной дисперсии довольно полно рассмотрены в монографиях [1, 5, 44] (учет пространственной дисперсии кроме появления новых ветвей колебаний ничего принципиально нового не вносит). По этой причине в дальнейшем мы сосредоточим наше внимание на второй постановке задачи, которая состоит в определении частот ω собственных колебаний неоднородной плазмы при тех или иных граничных условиях (в основном при естественных граничных условиях, например, в случае «запертых» внутри плазмы колебаний, см. ниже).

При этом наряду с уравнением (11.8) мы часто будем рассматривать более простое уравнение

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (11.9)$$

Это уравнение характеризует распределение потенциального электромагнитного поля ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$) в неоднородной среде и поэтому будет называться уравнением эйконала для продольных (потенциальных) волн.

Как же определить собственные частоты ω , т. е. как найти спектр собственных электромагнитных колебаний пространственно неоднородной плазмы?

Под таким углом зрения задачу распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме начали систематически изучать лишь сравнительно недавно [64] в связи с проблемой устойчивости магнитного удержания плазмы (см. § 13). Постараемся вкратце осветить здесь прогресс, достигнутый в этом направлении.

Для того чтобы ответить на поставленный выше вопрос, рассмотрим пример бесстолкновительной неоднородной изотропной плазмы, причем ограничимся случаем одномерной неоднородности*). Ось Ox направим вдоль неоднородности плазмы, а ось Oz по-прежнему будем считать совпадающей с направлением внешнего магнитного поля. Тогда уравнение для равновесной функции распределения частиц можно записать в виде

$$v_{\perp} \cos \varphi \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varphi} = 0, \quad (11.10)$$

где $\omega_{B\alpha} = \frac{e_{\alpha} B_0(x)}{m_{\alpha} c}$ — ларморовская частота частиц в неоднородном магнитном поле. Общее решение этого уравнения является произвольной функцией характеристик

$$f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(G_{\alpha}, E_{\alpha}), \quad (11.11)$$

где

$$G_{\alpha} = v_{\perp} \sin \varphi + \int^x dx' \omega_{B\alpha}(x'), \quad E_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v^2}{2}. \quad (11.12)$$

Во всех реальных случаях характерный размер неоднородности плазмы намного превосходит ларморовские

*) Теория колебаний двух- и трехмерно неоднородной плазмы в настоящее время очень далека от завершения, и вряд ли целесообразно ее здесь излагать.

радиусы частиц, т. е.

$$\frac{v T_{\alpha}}{\omega_{B\alpha} L_0} \ll 1. \quad (11.13)$$

В ионосферной плазме это отношение для электронов ($\alpha = e$) порядка $10^{-7} - 10^{-5}$, а для ионов ($\alpha = i$) порядка $10^{-4} - 10^{-2}$; в высокотемпературной же плазме в установках для управляемого синтеза оно соответственно имеет порядок $10^{-3} - 10^{-4}$ для электронов и порядка $10^{-1} - 10^{-2}$ для ионов (см. таблицы I—IV). Учитывая это, характеристику G_{α} можно разложить по малому параметру (11.13) и записать решение (11.11) в виде

$$f_{0\alpha}(G_{\alpha}, E_{\alpha}) = \left(1 + \frac{v_{\perp} \sin \Phi}{\omega_{B\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \right) F_{0\alpha}(E_{\alpha}, x), \quad (11.14)$$

где $F_{0\alpha}(E_{\alpha}, x)$ — произвольная функция E_{α} и координаты x . В качестве этой функции выбираем максвелловскую функцию распределения с неоднородной плотностью и температурой частиц:

$$F_{0\alpha}(E_{\alpha}, x) = \frac{N_{\alpha}(x)}{[2\pi m_{\alpha} T_{\alpha}(x)]^{3/2}} e^{-\frac{E_{\alpha}}{T_{\alpha}(x)}}. \quad (11.15)$$

Именно, в этом смысле неоднородную плазму считаем локально изотропной.

Следует, однако, заметить, что плотность электрического тока \mathbf{j}_0 в такой плазме отлична от нуля. Из выражения (11.14) видно, что этот ток направлен вдоль оси Oy и равен

$$j_{0y} = \frac{c}{B_0} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (N_{\alpha} T_{\alpha}). \quad (11.16)$$

Подставляя это выражение в уравнение поля

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0$$

и учитывая, что поле $\mathbf{B}_0(x)$ направлено по оси Oz , находим следующее условие равновесия плазмы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} + P_0 \right) = 0. \quad (11.17)$$

Здесь $P_0 = \sum_{\alpha} N_{\alpha} T_{\alpha}$ — полное давление плазмы.

Заметим, что ток j_0 носит чисто диамагнитный характер: он обусловлен микротоками ларморовских кружков частиц (центры которых неподвижны), которые взаимно не компенсируются вследствие неоднородности плазмы. Из рис. 14 видно, что для рассматриваемой геометрии ток j_0 направлен по оси Oy и по порядку величины равен

$$j_{0y} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} v_{др\alpha} \sim \sum_{\alpha} e_{\alpha} \Delta x \frac{\partial}{\partial x} N_{\alpha} v_{T\alpha} \sim \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} N_{\alpha} v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha} L_0}. \quad (11.18)$$

Эта оценка согласуется с выражением (10.16). Величину $v_{др\alpha} \sim v_{T\alpha}^2 / \omega_{B\alpha} L_0$, имеющую размерность скорости, обычно называют скоростью ларморовского дрейфа частиц. Из условия равновесия (11.17) следует, что отношение размера неоднородности давления к размеру неоднородности магнитного поля порядка $L_N / L_B \sim 8\pi P_0 / B_0^2 = \beta$. В ионосферной плазме $\beta \lesssim 10^{-5} \ll 1$, а в плазме в лабораторных установках $\beta \sim 10^{-2} - 10^{-4} \ll 1$. Это позволяет пренебречь неоднородностью магнитного поля по сравнению с неоднородностью плотности и температуры частиц плазмы.

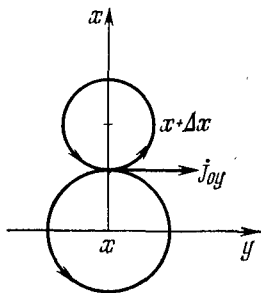


Рис. 14. К выводу формулы (11.18).

Хотя выше мы и ограничились случаем бесстолкновительной плазмы, однако все полученные формулы остаются в силе и при учете столкновений частиц, если только $v_{\alpha} \ll \omega_{B\alpha}$ (как для электронов, так и для ионов, т. е. $\alpha = e, i$).

Переходя к выводу выражения для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы, рассмотрим, как обычно, малое отклонение δf_{α} функции распределения от равновесной, которое мы представим в виде

$$\delta f_{\alpha} = \delta f_{\alpha}(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z). \quad (11.19)$$

Аналогичным образом запишем поля возмущений \mathbf{E} и \mathbf{B} . Тогда кинетическое уравнение для δf_{α} принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_{\alpha} + i v_x \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial x} - i \omega_{B\alpha} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \varphi} = \\ = -i e_{\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Характеристика этого уравнения совпадает с (11.12), а именно (при условии однородности магнитного поля)

$$v_{\perp} \sin \varphi + \omega_{B\alpha} x = G_{\alpha} = v_{\perp} \sin \varphi' + \omega_{B\alpha} x'. \quad (11.21)$$

Учитывая это обстоятельство, запишем общее решение уравнения (11.20) в виде

$$\delta f_{\alpha}(x) = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left\{ \mathbf{E}(x') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}' \mathbf{B}(x')] \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}'} \times \\ \times \exp \left[\frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k_y v_{\perp} \sin \varphi'' - k_z v_z) \right]. \quad (11.22)$$

Величина x' в этом выражении связана с x и φ соотношением (11.21). Представим теперь функцию δf_{α} и поля $\mathbf{E}(x)$

и $\mathbf{B}(x)$ в виде $\exp(i \int dx' k_x(x'))$ и ограничимся нулевым приближением геометрической оптики (т. е. пренебрежем производными функции $k_x(x)$). Тогда, вычисляя с помощью выражения (11.22) плотность тока, индуцированного в плазме, окончательно получим следующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы, справедливое в нулевом приближении геометрической оптики *):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \left\{ 1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ \times T_{\alpha} [\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, x) - \delta_{ij}]. \quad (11.23)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}, x)$ — тензор диэлектрической проницаемости частиц одного сорта α , по виду совпадающий с соответствующим тензором диэлектрической проницаемости однородной плазмы (см. формулы (7.6)), в котором, однако, N_{α} и T_{α} считаются функциями координаты x .

Заметим здесь, что тензор (7.6) записан в системе координат, в которой $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_z)$, в то время как в формуле (11.23) система координат произвольна и $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Соответствие между тензором (7.6) и тензором, фигурирующим в (11.23), легко установить простым вращением системы координат. Однако в этом даже нет необходи-

*) Вычисления здесь совершенно аналогичны приведенным в § 7 для случая однородной плазмы.

мости. Дело в том, что уравнение (8.1) с обозначениями (8.2) (которое в неоднородной плазме рассматривается как уравнение эйконала) сохраняет вид в произвольной системе координат. Необходимо только иметь в виду, что к компонентам тензора $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ (ω , \mathbf{k} , x) в этих формулах в случае неоднородной плазмы следует применять оператор

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{T_{\alpha}} \left(1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} \right) T_{\alpha},$$

где суммирование проводится по сортам заряженных частиц, а $k_{\perp} = \sqrt{k_y^2 + k_x^2}$.

Сказанное особенно ясно видно на примере продольной диэлектрической проницаемости, которая в случае пространственно неоднородной магнитоактивной плазмы записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = & 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\omega_{B\alpha}} \times \right. \\ & \times \left(1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} \left[\frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}} \right] \right) \times \\ & \left. \times A_s \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega - s\omega_{B\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}. \quad (11.24) \end{aligned}$$

Из формул (11.23) и (11.24) видно, что в неоднородной плазме появляется новая характерная частота (для каждого сорта частиц)

$$\omega_{др\alpha} = k_y v_{др\alpha} \sim \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha} L_0}, \quad (11.25)$$

называемая ларморовской дрейфовой частотой (так как она связана со скоростью ларморовского дрейфа частиц). При частотах $\omega \gg \omega_{др\alpha}$ членами, содержащими пространственные производные в формулах (11.23) и (11.24), можно пренебречь, и тогда эти выражения по виду в точности совпадут с соответствующими выражениями для диэлектрической проницаемости однородной плазмы. Более того, в этом пределе оказываются справедливыми также и выражения для диэлектрической проницаемости с учетом столкновений частиц, приведенные в § 7; в этих формулах, однако, плотность и температура частиц уже являются функциями координаты x . В этом пределе, очевидно,

сохраняют свой вид и выражения для диэлектрической проницаемости изотропной плазмы без внешних полей (см. § 5) как в отсутствие, так и при учете столкновений частиц.

Иное положение имеет место в области частот $\omega \ll \ll \omega_{др\alpha}$, когда в формулах (11.23) и (11.24) существенными становятся члены с пространственными производными. Здесь уже указанный выше рецепт «конструирования» диэлектрической проницаемости бесстолкновительной неоднородной плазмы из выражения для проницаемости однородной плазмы может оказаться неверным при учете столкновений частиц. К этому вопросу мы вернемся ниже, в § 13, при исследовании дрейфовых колебаний плазмы. Пока же рассмотрим лишь высокочастотные колебания неоднородной плазмы, $\omega \gg \omega_{др\alpha}$, и будем пользоваться формулами, полученными в §§ 5 и 7.

Прежде всего ответим на поставленный выше вопрос об определении спектров частот собственных электромагнитных колебаний пространственно неоднородной плазмы. Рассмотрим этот вопрос на простейшем примере плазмы без внешних полей с изотропной функцией распределения частиц по скоростям. Изложенный здесь метод определения спектров колебаний в дальнейшем применяется к более сложным случаям магнитоактивной и анизотропной неоднородной плазмы.

Рассмотрение начнем со случая высокочастотных поперечных волн, фазовые скорости которых больше скорости света. Из формул (5.13), (5.24) и (11.8) получаем следующее уравнение эйконала для высокочастотных поперечных волн с учетом столкновений частиц:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_{Ne}^2 \nu_e}{\omega^3} \right] = 0. \quad (11.26)$$

С другой стороны, если исходить из уравнений двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы (а она применима, так как для рассматриваемых высокочастотных колебаний эффекты теплового движения частиц несущественны), то для поперечного поля в неоднородной плазме получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta \mathbf{E}^{tr} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_{Ne}^2 \nu_e}{\omega^3} \right) \mathbf{E}^{tr} = 0. \quad (11.27)$$

Уравнение эйконала, соответствующее уравнению поля

(11.27) в нулевом приближении геометрической оптики, очевидно, совпадает с (11.26).

Уравнение (11.27) имеет вид уравнения Шредингера с комплексным потенциалом [27]

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + U(\omega, x)\Psi = 0, \quad U = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V). \quad (11.28)$$

Нас интересуют достаточно быстро меняющиеся в пространстве решения этого уравнения, удовлетворяющие условию применимости приближения геометрической оптики (11.1). В квантовой механике такие решения называют квазиклассическими. Теория асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка вида (11.28) хорошо разработана (см. [64], где указана специальная литература). Напомним кратко основные положения этой теории, касающиеся явления Стокса и спектра собственных значений уравнения (11.28). Ограничимся при этом практически наиболее интересным случаем почти вещественных функций $U(\omega, x)$ (т. е. с малой мнимой частью $\text{Im } U \ll \text{Re } U$). Будем считать, что частоты собственных колебаний также удовлетворяют условию $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$.

Асимптотическое решение уравнения (11.28) записывается в виде

$$\Psi(x) = C_+ \exp\left(i \int^x \sqrt{U(\omega, x')} dx'\right) + C_- \exp\left(-i \int^x \sqrt{U(\omega, x')} dx'\right). \quad (11.29)$$

Существенную роль в поведении этого решения играют так называемые точки поворота, в которых

$$U(\omega, x) = 0. \quad (11.30)$$

Вблизи таких точек поворота происходит переход от колебательного режима в решении (11.29) к аperiодически затухающему от точки поворота режиму (нарастающие решения отбрасываются в соответствии с требованием ограниченности решения на бесконечности *). Так как мнимые части величин $U(\omega, x)$ и ω малы, то можно считать,

*). Строго говоря, наше рассмотрение справедливо для неоднородной и неограниченной в пространстве плазмы. В ограниченной среде должны приниматься во внимание также и нарастающие от точки поворота решения.

что точки поворота расположены вблизи вещественной оси, т. е. они также обладают лишь малой мнимой частью. Область между точками поворота на действительной оси, в которой $\operatorname{Re} U(\omega, x) > 0$, принято называть областью прозрачности (в этой области как раз и имеет место колебательный режим (11.29)).

В общем случае комплексная плоскость x может быть разбита на области, в каждой из которых коэффициенты C_{\pm} имеют постоянные значения. Переход от одной области в другую сопровождается скачкообразным изменением этих коэффициентов. В этом и заключается явление Стокса; линии, отделяющие указанные области друг от друга, называются линиями Стокса (на этих линиях $\operatorname{Im} \sqrt{U(\omega, x)} = 0$). Очевидно, что точки поворота лежат на линиях Стокса. Легко показать, что в окрестности точек поворота решения уравнения (11.28) (асимптотическое решение (11.29) в этой области непригодно, так как нарушается условие применимости геометрической оптики (11.1)) выражаются через функции Бесселя (для этого достаточно функцию $U(\omega, x)$ разложить в ряд около точек поворота; считается, что разложение начинается с линейных членов). Асимптотическое поведение и явление Стокса для таких функций хорошо изучены (см. [43]). Требуя совпадения асимптотических представлений функций Бесселя с решением (11.29), находим коэффициенты C_{\pm} . Отсюда же следует правило квантования, определяющее спектр дискретных собственных значений уравнения (11.28). В случае, когда имеются только две точки поворота, между которыми расположена область прозрачности, правило квантования записывается в виде известного интеграла Бора — Зоммерфельда [65]:

$$\int_{x_{\mu}}^{x_{\nu}} dx k_x(\omega, x) = \pi(n + 1/2). \quad (11.31)$$

Здесь $k_x(\omega, x) = \sqrt{U(\omega, x)}$, а n — целые числа, значительно превосходящие единицу (именно поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать $1/2$ по сравнению с n). Интегрирование в формуле (11.31) ведется по области прозрачности, где $\operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) = \operatorname{Re} U(\omega, x) \geq 0$, расположенной между точками поворота *) x_{μ} и x_{ν} .

*) Правило квантования (11.31) сохраняет силу и при произвольной комплексной функции $U(\omega, x)$, если только точки поворота

Соотношение (11.31) имеет простой физический смысл. Оно гласит, что в области прозрачности между точками поворота должно укладываться целое число полувольт. Именно, такое положение имеет место для колебаний упругой струны с закрепленными концами. Это и не удивительно, так как уравнение (11.28) аналогично уравнению колебаний струны со слабонеоднородным модулем упругости. Точки поворота при этом можно отождествить с закрепленными концами струны, ибо за пределами этих точек решения уравнения (11.28) экспоненциально убывают. Таким образом, соотношение (11.31) определяет спектр собственных значений уравнения (11.28). Это соотношение имеет вид, аналогичный известному квазиклассическому правилу квантования в квантовой механике. В связи с этим нами и употребляется это условное название.

Учитывая малость мнимых частей частоты ω , функции $k_x(\omega, x)$ и точек x_μ и x_ν (последнее позволяет пренебречь малым вкладом от интегрирования по мнимым осям), из формулы (11.31) получаем два соотношения, определяющие частоту ω и декремент затухания колебаний γ (напомним замену $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$):

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) = \pi n, \quad \gamma = - \frac{\int dx \operatorname{Im} k_x(\omega, x)}{\int dx \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} k_x(\omega, x)}. \quad (11.32)$$

В формулах (11.32) интегрирование ведется по области прозрачности между проекциями точек поворота на действительную ось.

Существенно заметить, что вторым соотношением (11.32) для определения декремента затухания колебаний γ следует пользоваться лишь в тех случаях, когда частоты ω , определяемые из первого соотношения, действительны, или, как говорят, колебания гидродинамически устойчивы. Знак величины γ при этом показывает, являются ли колебания затухающими ($\gamma < 0$) или нарастающими ($\gamma > 0$), т. е. устойчивы ли они кинетически.

В тех случаях, когда в плазме существуют две точки поворота и область прозрачности расположена между ними, говорят о «запертых» колебаниях. Дисперсионные соотношения (11.32) для определения спектра «запертых»

x_μ и x_ν образуют комплекс II рода [65]. Это означает, что внешние области (области, содержащие бесконечно удаленные отрезки вещественной оси $x \rightarrow \pm \infty$), отходящие от каждой из двух точек поворота и разделенные линиями Стокса, являются несвязанными.

колебаний остаются в силе и тогда, когда в области изменения x имеется несколько достаточно удаленных друг от друга (на расстояние больше длины волны) пар точек поворота. При этом записывают столько правил «квантования», сколько имеется областей прозрачности. Если, наконец, во всей области изменения x точки поворота отсутствуют, то нет и «запертых» колебаний, а решения (11.29) инфинитны *). В этом случае, вообще говоря, не существует правил квантования, определяющих спектр собственных значений ω , т. е. для любых ω возможны инфинитные решения (11.29). Исключение составляет ограниченная в направлении неоднородности плазма (плоский слой) в условиях, когда на ее границах заданы недиссипативные граничные условия. Легко показать, что спектр собственных значений в этом случае является квантованным (дискретным) и определяется соотношением (11.31).

В ряде интересных для плазмы случаев уравнения эйконала (11.8) и (11.9) определяют попарно сопряженные корни $\pm k_{xs}(\omega, x)$ с достаточно удаленными областями прозрачности, либо вообще с одной областью прозрачности для волн данного типа. Каждой паре таких корней в нулевом приближении геометрической оптики формально можно сопоставить дифференциальное уравнение вида (11.28), где $U(\omega, x) = \epsilon_{xs}^2(\omega, x)$, и воспользоваться полученными правилами «квантования» для определения собственных значений ω . В этом, собственно, и состоит общая идеология, положенная в основу теории колебаний неоднородной плазмы.

Таким образом, спектр колебаний неоднородной плазмы оказывается, вообще говоря, дискретным. В приближении геометрической оптики, однако, спектр является довольно «густым» и его дискретность малосущественна. Существенно другое, а именно то, что спектр колебаний неоднородной плазмы в отличие от однородной определяется не локальным, а интегральным соотношением, охватывающим большую область плазмы.

После изложения основ теории колебаний неоднородной плазмы вернемся к вопросу о распространении высокочастотных поперечных волн в такой плазме. Определяя из уравнения (11.26) комплексную функцию $k_x(\omega, x)$ и используя правила «квантования» (11.32), получим следующие

*) Решения (11.29), запертые между точками поворота, называются финитными решениями.

соотношения для определения ω и γ :

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{Ne}^2}{c^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (11.33)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \right)^{-1} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{\omega_{Ne}^2 v_e}{\omega^2}.$$

В случае однородной плазмы эти формулы, естественно, переходят в (6.30) и (6.33), причем $\lim_{\rightarrow \infty} \frac{\pi n}{L_0} = k_x$.

Проанализируем формулы (11.33) с точки зрения распространения электромагнитных волн (радиоволн) в ионосфере. Из первого соотношения видно, что в неоднородной плазме, так же как и в однородной, частота поперечных волн удовлетворяет условию $\omega^2 > \omega_{Ne}^2$; в неоднородной плазме это условие должно выполняться в каждой точке пространства. От точек, где нарушается это условие, происходит отражение электромагнитной волны при нормальном ее распространении (т. е. когда $k_y = k_z = 0$). При наклонном распространении отражение происходит от точек поворота $\omega^2 = (k_y^2 + k_z^2)c^2 + \omega_{Ne}^2$. В ионосфере плотность заряженных частиц, а следовательно и $\omega_{Ne}^2(x)$, вначале растет с высотой, достигая на высотах $\sim 300-400$ км максимума, $\omega_{Ne \max} \approx 10^8 \text{ сек}^{-1}$ (см. табл. III). Это означает, что волны с частотой $\omega > 10^8 \text{ сек}^{-1}$ (т. е. $\lambda_0 = 2\pi c/\omega \sim \sim 20$ м) нигде не отражаются от ионосферы. Иными словами, такие электромагнитные волны в ионосферной плазме инфинитны, т. е. частоты их колебаний не квантуются; они существуют при любых частотах. Электромагнитные же волны с $\omega < \omega_{Ne \max} \approx 10^8 \text{ сек}^{-1}$ отражаются от ионосферы, причем для каждой частоты ω имеются две точки отражения (или поворота): верхняя и нижняя. Области прозрачности для поперечных волн при этом лежат выше верхней и ниже нижней точек поворота, т. е. существуют две области прозрачности: верхняя и нижняя. В верхней области прозрачности электромагнитные волны инфинитны, так как для них нет второй точки поворота (т. е. они не заперты). Нижняя же область прозрачности снизу ограничена Землей, от поверхности которой электромагнитные волны отражаются практически без потерь (недиссипативная граница). Для электромагнитных волн в нижней области прозрачности (это и есть область распространения радиовещательных волн) поэтому, строго говоря,

следует учитывать правила квантования (11.32). Чем длиннее волны, тем важнее становятся эти соотношения и тем менее пригодны локальные спектры однородной плазмы (6.30) и (6.33).

Здесь следует заметить, что частоты колебаний поперечных волн, которые могут распространяться в ионосферной плазме, ограничены снизу частотой столкновений электронов ν_e . Волны с $\omega < \nu_e$ сильно поглощаются в плазме благодаря столкновениям электронов. В ионосфере вследствие такого ограничения могут распространяться лишь волны с частотой *) $\omega > \nu_{e\max} \sim 2 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$ (или $\lambda_0 = 2\pi c/\omega < 10 \text{ км}$, см. табл. II). Так как даже эти длины волн значительно меньше характерного размера неоднородности ионосферы (который порядка 100 км), то можно думать, что для радиоволн эффекты квантования частот несущественны; с большой степенью точности для них можно пользоваться приближенными локальными спектрами (6.30) и (6.33).

Что касается лабораторной плазмы, то явление отражения поперечных электромагнитных волн от точек поворота широко используется в экспериментальной технике для диагностики плотности плазмы [67].

Рассмотрим теперь продольные волны в неоднородной изотропной плазме. Используя выражения (5.13) и (5.24), получим следующее уравнение эйконала для высокочастотных $\omega \gg kv_{Te}$ электронных ленгмюровских колебаний плазмы:

$$1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \frac{\omega_{Ne}^2 \nu_e}{\omega^3} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Ne}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left(- \frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right) = 0. \quad (11.34)$$

Здесь учтены как столкновительное, так и бесстолкновительное (черенковское) поглощение волн частицами плазмы.

Определяя из этого уравнения комплексную функцию ω , учитывая при этом малость мнимых слагаемых по сравнению с вещественными и используя правила квантования (11.31), получим следующие дисперсионные соотношения для определения спектра продольных ленгмюровских

*) По указанным выше причинам полоса радиовещательных волн лежит в пределах $2 \text{ км} > \lambda_0 > 10 \text{ м}$.

воли в изотропной неоднородной плазме:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 - \omega_{Ne}^2}{3v_{Te}^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (11.35)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{1}{v_{Te}^2} \right)^{-1} \cdot \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{1}{v_{Te}^2} \times \\ \times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_e + \frac{\omega_{Ne}^4}{v_{Te}^3 (\operatorname{Re} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{3/2}} \exp \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \operatorname{Re} k^2 r_{De}^2} \right) \right\}.$$

Заметим, что в выражении для γ под $\operatorname{Re} k^2$ следует понимать величину $\operatorname{Re} k^2 = \operatorname{Re} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, где $\operatorname{Re} k_x^2$ определяется первым из соотношений (11.35). В случае однородной плазмы эти формулы переходят в полученные в § 6 (см. (6.4) и (6.21)). Интегрирование в формулах (11.35) ведется по области прозрачности плазмы для рассматриваемых колебаний, т. е. по области, в которой $\operatorname{Re} k_x^2 > 0$. Поэтому в любой точке $\omega^2 > \omega_{Ne}^2$. С другой стороны, из условия $\omega \gg kv_{Te}$ следует, что ω не может сильно отличаться от $\omega_{Ne}(x)$. В точке, в которой $\omega = \sqrt{3(k_y^2 + k_z^2)v_{Te}^2 + \omega_{Ne}^2(x)}$, являющейся точкой поворота, происходит отражение ленгмюровской волны.

В ионосферной плазме при заданной частоте ω для продольных ленгмюровских волн, так же как и для поперечных волн, существуют две точки поворота и две наружные области прозрачности: верхняя и нижняя. Две области прозрачности существуют для продольных волн и в лабораторной плазме, имеющей вид плазменного цилиндра либо неоднородного плоского слоя: левая и правая, в которых $\omega^2 > \omega_{Ne}^2(x)$. В отличие от поперечных волн эти области прозрачности являются весьма узкими и прилегают непосредственно к точкам поворота, в которых $\omega \approx \omega_{Ne}(x)$. Каждая из этих областей ограничена одной точкой поворота. Второй точки поворота у продольных волн, так же как и у поперечных, нет. Однако в отличие от поперечных волн область прозрачности для продольных волн в неоднородной плазме граничит с областью сильного бесстолкновительного поглощения волн. Это связано с нарушением неравенства $k^2 v_{Te}^2 < \omega_{Ne}^2$ при уменьшении плотности (а, следовательно, ω_{Ne}^2) и появлением сильного затухания Ландау (см. § 6, формулу (6.10)). Таким

образом, в неоднородной плазме области прозрачности для электронных ленгмюровских волн с внутренней стороны ограничены точкой поворота, а с наружной — областью сильного поглощения. Это приводит к тому, что такие волны не являются запертыми между точками поворота; из области прозрачности они выходят в область сильного поглощения. Поэтому такие волны не квантуются, и, следовательно, формулы (11.35) для них неприменимы. Отметим также, что в условиях применимости приближения геометрической оптики, когда длина волны колебаний значительно меньше характерного размера неоднородности плазмы, для определения спектра ленгмюровских колебаний с хорошей степенью точности можно пользоваться локальными формулами, полученными в § 6.

Отсутствие квантования для электронных ленгмюровских волн в реальной неоднородной плазме, по существу, является следствием колоколообразной зависимости плотности частиц от x . Но именно такая зависимость $N(x)$ обеспечивает существование запертых низкочастотных продольных ионно-звуковых волн в изотропной неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$. Уравнение эйконала для таких волн записывается в виде (ср. с (6.11) с учетом (6.23) и (6.24))

$$1 - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te}} \right) + i \alpha \frac{\omega_{Ni}^2 v_i}{\omega^3} = 0, \quad (11.36)$$

где для единой записи введено обозначение *)

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{для слабоионизованной плазмы,} \\ \frac{8}{5} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} & \text{для полностью ионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (11.37)$$

При написании уравнения (11.36) мы полностью пренебрегли тепловым движением ионов, имея в виду сильную неизотермичность плазмы

$$1 \gg \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{M}{m}} \exp \left(- \frac{T_e}{2T_i} \right).$$

*) Заметим, что под v_i в формуле (11.36) понимается v_{in} в случае слабоионизованной плазмы и v_{ii} для полностью ионизованной. Аналогично в формулах (11.26), (11.27) и (11.33) — (11.35) $v_e = v_{en}$ либо $v_e = v_{эфф}$ в случаях слабо- и сильно ионизованной плазмы соответственно.

Из уравнения эйконала (11.36) при использовании правил квантования (11.32) получаем следующие дисперсионные соотношения для определения спектра низкочастотных продольных волн в неизотермической изотропной и неоднородной плазме:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{v_s^2} \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Ni}^2 - \omega^2} \right)^{1/2} = \pi n, \quad (11.38)$$

$$\gamma = -\frac{\omega^2}{2} \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Ni}^2 - \omega^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{kv_{Te} v_s^2} + \frac{\alpha k^2 v_i}{\omega^4} \right)}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{\omega_{Ni}^4}{v_s^2 (\omega_{Ni}^2 - \omega^2)^2}}.$$

В выражении для γ в соответствии с условием $\gamma \ll \omega$ под k^2 следует понимать $k^2 = \operatorname{Re} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, где $\operatorname{Re} k_x$ определяется первым соотношением (11.38).

Из формул (11.38) видно, что рассматриваемые колебания существуют лишь в области частот $\omega^2 < \omega_{Ni}^2(x)$. При $\omega^2 > \omega_{Ni}^2(x)$ продольные колебания в плазме невозможны; имеет место дебаевская экранировка поля (т. е. $k^2 < 0$, см. § 5). Это означает, что низкочастотные волны в неизотермической плазме будут отражаться от областей, где $\omega_{Ni}^2 < \omega^2$, и в случае колоколообразного распределения плотности по x , как это имеет место реально в лабораторных условиях, окажутся запертыми внутри плазмы. Естественно, такие волны будут «квантованы» и спектр их следует определять по формулам (11.38). В ионосфере, как уже неоднократно отмечалось выше, низкочастотные ионно-звуковые волны, по-видимому, невозможны из-за ее недостаточной неизотермичности (для существования таких волн необходимо, чтобы $T_e > 6T_i$, см. § 6).

В заключение заметим, что для ионно-звуковых волн, так же как и для электронных ленгмюровских и поперечных электромагнитных волн, в условиях применимости приближения геометрической оптики можно пользоваться приближенными локальными спектрами, определенными непосредственно из уравнения эйконала, рассматриваемого как дисперсионное уравнение*). Использование развитой выше теории колебаний неоднородной плазмы на

*) Под «локальным спектром» понимаются функции $\omega(k, x)$, которые являются решениями уравнения эйконала (11.8).

первый взгляд сводится к нахождению точек поворота и определению областей локализации колебаний. Это утверждение, однако, является правильным лишь в качественном отношении. При точном количественном определении спектра частот колебаний неоднородной плазмы, строго говоря, следует всегда пользоваться развитой теорией и в особенности правилами «квантования». Во многих случаях, однако, локальные спектры оказываются достаточно точными не только качественно, но также и количественно. В § 13 такие спектры и будут изучены.

§ 12. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Перейдем теперь к более полному рассмотрению спектров колебаний слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. В § 8 мы уже убедились, что даже в однородной магнитоактивной плазме число различных ветвей колебаний велико. В неоднородной магнитоактивной плазме появляется новое многообразие ветвей колебаний, обусловленных ларморовским дрейфом частиц и называемых дрейфовыми колебаниями. Частоты дрейфовых колебаний лежат в области $\omega \lesssim \omega_{др\alpha} < k_y v_{T\alpha}^2 / \omega_{B\alpha} L_0$, где $\alpha = e, i$. Такие колебания исследуются в следующем параграфе. В настоящем же параграфе мы ограничимся рассмотрением так называемых «высокочастотных» колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы, частоты которых больше дрейфовых частот частиц.

Как уже отмечалось в § 10, в области частот $\omega \gg \omega_{др\alpha}$ в выражении для тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы членами, содержащими пространственные производные, можно пренебречь. Уравнение эйконала для электромагнитных колебаний (11.8) в этом пределе имеет такой же вид, как и дисперсионное уравнение колебаний однородной плазмы (8.1), но, по существу, отличается от него тем, что плотность и температура частиц (а в области высоких частот также и магнитное поле) считаются зависящими от координаты x . Благодаря этому обстоятельству собственные частоты колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы, строго говоря, определяются не локальными соотношениями, как это имело место в случае однородной плазмы (см. § 8), а интегральными. Эти интегральные соотношения — правила квантования Бора — Зоммерфельда — имеют вид (11.32), где комплекс-

спая функция $k_x(\omega, x)$ определяется из уравнения эйконала. Во всех других отношениях характер колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы (число ветвей колебаний, условия существования слабозатухающих колебаний и др.) в рассматриваемой области частот, когда $\omega \gg \omega_{дрx}$, а не отличается от характера колебаний однородной плазмы. Более того, в используемом нами приближении геометрической оптики спектры колебаний однородной плазмы, рассматриваемые в неоднородной плазме как локальные, качественно правильно описывают «высокочастотные» колебания. Несмотря на это, мы проанализируем здесь высокочастотные колебания неоднородной магнитоактивной плазмы на основе развитой выше общей теории с целью получения более точных количественных характеристик спектров. Применительно к ионосферной плазме такие точные соотношения большой ценности не представляют, так как характерные размеры неоднородности ионосферной плазмы действительно на много порядков больше длины волн рассматриваемых здесь слабозатухающих колебаний, а поэтому локальные спектры всегда оказываются достаточно точными. Эффекты неоднородности ионосферы правильнее учесть в постановке задачи распространения радиоволн, как это изложено в монографиях [1, 44]. Что касается лабораторной плазмы, то точные интегральные спектры колебаний могут количественно заметно отличаться от локальных спектров. Поскольку, однако, нахождение точных спектров требует знания явного вида неоднородности плазмы, который зависит от конкретных условий эксперимента, мы не будем полученные ниже соотношения обсуждать применительно к какой-либо реальной плазме; они имеют ценность при количественных оценках в каждом конкретном случае отдельно.

Анализ спектров начнем с наиболее простого случая продольных (потенциальных) колебаний неоднородной плазмы, описываемых уравнением эйконала (11.9). В пределе холодной плазмы, но с учетом малых диссипативных эффектов это уравнение запишется в виде

$$k_{\perp}^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2} \left(1 - i \frac{v_{\alpha}}{\omega} \frac{\omega^2 + \omega_{B\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2} \right) + \right. \\ \left. + i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega |k_z| v_{T\alpha}} \left(\exp \left[- \frac{(\omega - \omega_{B\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2} \right] \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \exp \left[- \frac{(\omega + \omega_{B\alpha})^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2} \right] \Bigg) \Bigg) + k_z^2 \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{v_{\alpha}}{\omega} \right) + \right. \\
& \left. + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha} \frac{\omega \omega_{N\alpha}^2}{|k_z^3| v_{T\alpha}^3} \exp \left[- \frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{T\alpha}^2} \right] \right\} = 0, \quad (12.1)
\end{aligned}$$

Определив из этого уравнения функцию $k_x(\omega, x)$ и подставив ее в правила квантования (11.32), получим дисперсионные соотношения для нахождения частот и декрементов затухания продольных волн в неоднородной магнитоактивной плазме. Как было показано в § 8, в холодной магнитоактивной плазме существуют три ветви продольных колебаний: две высокочастотные электронные и одна низкочастотная ионная (см. формулы (8.14) и (8.15)). В случае неоднородной плазмы, пренебрегая малыми диссипативными членами в уравнении (12.1), получаем следующее дисперсионное уравнение для определения спектра частот электронных продольных волн:

$$\begin{aligned}
& \int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \\
& \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 - k_z^2 \frac{(\omega^2 - \omega_{Ne}^2)(\omega^2 - \omega_{Be}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{Ne}^2 - \omega_{Be}^2)} \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (12.2)
\end{aligned}$$

Это уравнение определяет две ветви колебаний, соответствующие корням ω_1 и ω_2 в однородной плазме. Легко видеть, что частоты первой ветви колебаний лежат в области $\omega_{Ne}^2 \leq \omega^2 \leq \omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2$, а второй — в области $\omega_{Be}^2 \geq \omega^2 \geq |\omega_{Be}\omega_{Bi}|$ (нижняя граница последней, вообще говоря, определяется лишь при учете ионных членов в дисперсионном уравнении (12.2), см. § 8, рис. 5). Вне этих областей высокочастотные продольные волны распространяться не могут, они испытывают полное внутреннее отражение в точках, определяющих границы областей прозрачности плазмы, так как величина $\operatorname{Re} k_x^2(\omega, x)$ в этих точках меняет знак и становится отрицательной.

Учет малых диссипативных членов в уравнении эйконала приводит к затуханию рассматриваемых колебаний. Декремент затухания мал по сравнению с частотой

колебаний и определяется выражением

$$\begin{aligned} \gamma = & \left\{ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) \right\}^{-1} \times \\ & \times \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \left\{ k_z^2 \left[\frac{\omega_{Ne}^2 \nu_e}{\omega^3} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Ne}^2}{|k_z^3| v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \right] + \right. \\ & + k_{\perp}^2 \left[\frac{\omega_{Ne}^2 (\omega^2 + \omega_{Be}^2) \nu_e}{\omega (\omega^2 - \omega_{Be}^2)^2} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega |k_z| v_{Te}} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_{Be})^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_{Be})^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \right) \right] \right\}. \quad (12.3) \end{aligned}$$

Интегрирование в этой формуле ведется по области прозрачности плазмы, расположенной между точками отражения волн. Под k_{\perp}^2 при этом следует понимать $\operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) + k_y^2$, где $\operatorname{Re} k_x$ определяется соотношением (12.2), а $\nu_e = \nu_{\text{эфф}}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $\nu_e = \nu_{en}$ для слабоионизованной.

Для третьей, низкочастотной ветви продольных колебаний холодной магнитоактивной плазмы из уравнений эйконала (12.1) при использовании правил квантования (11.32) получаем следующие дисперсионные соотношения, определяющие спектр частот ω и декремент затухания колебаний γ :

$$\begin{aligned} \int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) & \equiv \\ & \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 + k_z^2 \frac{\omega_{Ne}^2 (\omega^2 - \omega_{Bi}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{Ni}^2 - \omega_{Bi}^2)} \right\}^{1/2} = \pi n, \quad (12.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \left\{ \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) \right\}^{-1} \times \\ & \times \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \left\{ k_{\perp}^2 \left[\frac{\nu_i \omega_{Ni}^2 (\omega^2 + \omega_{Bi}^2)}{\omega (\omega^2 - \omega_{Bi}^2)^2} + \right. \right. \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega |k_z| v_{Ti}} \left(\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_{Bi})^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_{Bi})^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2}\right) \right) \right] + \\ & \left. + k_z^2 \left[\frac{\omega_{Ne}^2 \nu_e}{\omega^3} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Ne}^2}{|k_z^3| v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $k_{\perp}^2 = \text{Re } k_x^2(\omega, x) + k_y^2$, а $v_e = v_{\text{эфф}}$, $v_i = \frac{m}{M} v_{\text{эфф}}$ в случае полностью ионизованной плазмы и $v_e = v_{en}$, $v_i = v_{in}$ для слабоионизованной. В случае однородной плазмы соотношения (12.4) приводят к спектру, описываемому формулами (8.14), (8.15) и (8.22), (8.23). Так же как и в однородной плазме, для этой ветви колебаний $\omega^2 \leq \omega_{Bi}^2$.

Продольные волны в магнитоактивной плазме, да еще неоднородной, в общем случае, очевидно, не являются нормальными собственными волнами. В магнитоактивной плазме электромагнитные волны можно считать продольными лишь в области малых фазовых скоростей. Поэтому рассмотрим теперь произвольные, вообще говоря, непотенциальные колебания холодной магнитоактивной плазмы и выясним условия их потенциальности. Полное уравнение эйконала (11.8) в случае холодной магнитоактивной плазмы запишем в виде

$$k_{\perp}^4 \varepsilon_{xx} + k_{\perp}^2 \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} \right) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xy}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}^2) \right] + \varepsilon_{zz} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy} \right) + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{xy}^2 \right] = 0. \quad (12.5)$$

Здесь компоненты тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, k, x)$ определяются выражениями (7.8), (7.13) и (7.14).

Из уравнения (12.5) находим две функции $k_{x1,2}^2(\omega, x)$, которые соответствуют двум типам колебаний холодной магнитоактивной плазмы — обыкновенной и необыкновенной волнам. Пренебрегая малыми диссипативными членами, обусловленными столкновениями частиц (условия их малости подробно обсуждались в § 8), из уравнения (12.5) с помощью формул квантования (11.32) получаем следующее дисперсионное уравнение для определения спектров частот таких колебаний холодной магнитоактивной плазмы:

$$\int dx \{ -k_y^2 - p \mp \sqrt{p^2 - q} \}^{1/2} = \pi n, \quad (12.6)$$

где введены обозначения

$$p = \frac{1}{2\varepsilon_{xx}^{\text{э}}} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx}^{\text{э}} \right) (\varepsilon_{xx}^{\text{э}} + \varepsilon_{zz}^{\text{э}}) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xy}^{\text{э}2} \right], \quad (12.7)$$

$$q = \frac{\varepsilon_{zz}^{\text{э}}}{\varepsilon_{xx}^{\text{э}}} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx}^{\text{э}} \right)^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{xy}^{\text{э}2} \right].$$

Уравнение (12.6) определяет все пять ветвей колебаний холодной магнитоактивной плазмы в области ее прозрачности (см. § 8).

В пределе $c^2 k_z^2 / \omega^2 \gg \epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$ уравнение (12.6) переходит в уравнение эйконала для продольных волн (12.1). При этом в случае высоких (электронных) частот одно из уравнений (12.6) совпадает с (12.2); колебания, описываемые вторым уравнением (12.6), в этом пределе невозможны, так как $k_{x2}^2(\omega, x) < 0$, т. е. плазма для таких колебаний непрозрачна. В случае же низких частот из уравнения (12.6) получаем (12.4).

Учет малых диссипативных членов приводит к появлению затухания колебаний, описываемых уравнением (12.6), причем в пределе $c^2 k_z^2 / \omega^2 \gg \epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$ соответственно для высоких и низких частот колебаний выражения для γ совпадают с (12.3) и (12.4).

Из непотенциальных колебаний холодной неоднородной магнитоактивной плазмы исследуем здесь более подробно спектры альвеновских, быстрых магнитозвуковых и спиральных волн (как это было сделано в случае однородной магнитоактивной плазмы). Альвеновские и быстрые магнитозвуковые волны существуют в области частот $\omega \ll \omega_{Vi}$ (см. § 8). Дисперсионные соотношения (12.6) для таких волн сводятся к следующим:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) \right\}^{1/2} = \pi n, \quad (12.8)$$

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 - \frac{\omega_{Ne}^2}{c^2} \left[1 - \frac{k_z^2 v_A^2}{\omega^2 (1 + v_A^2/c^2)} \right] \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (12.9)$$

В случае однородной плазмы рассматриваемые колебания соответствуют спектрам ω_1 и ω_2 , описываемым формулами (8.16). Из формул (12.8) и (12.9) следует, что в неоднородной плазме быстрая магнитозвуковая волна может существовать лишь в области пространства, в которой $\omega^2 > (k_y^2 + k_z^2)v_A^2$, а альвеновская — в области, где $\omega^2 < k_z^2 v_A^2$. Учет диссипативных членов в уравнении эйконала (12.5) в области частот $\omega \ll \omega_{Vi}$ приводит к следующим выражениям для декрементов затухания быстрых

магнитозвуковых и альвеновских волн соответственно:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \left[\sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 v_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}^2} + \sqrt{2\pi} \frac{\omega_{Ne}^2 k_{\perp}^3 v_{Te}}{|k_z| \omega_{Be}^2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \right] \left[\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2}\right)^{-1} \right], \quad (12.10)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \left[\sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2 v_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}^2} \frac{\omega_{Ne}^2}{1 + c^2/v_A^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_{\perp}^2 c^2 \omega^4}{|k_z^3| v_{Te}^3} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \right] \left[\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + c^2/v_A^2} \right]^{-1}. \quad (12.11)$$

Здесь под k_{\perp}^2 следует понимать $k_{\perp}^2 = \operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) + k_y^2$, где $\operatorname{Re} k_x(\omega, x)$ определяется соотношениями (12.8) и (12.9);

$v_i = v_{\text{эфф}}$ и $v_i = \frac{m}{M} v_{\text{эфф}}$ в случае полностью ионизованной плазмы, и $v_e = v_{en}$ и $v_i = v_{in}$ для слабоионизованной. В пределе пространственно однородной плазмы формулы (12.10) и (12.11) переходят в (8.24).

Рассмотрим теперь спиральные волны в неоднородной плазме. Как отмечалось в § 8, спиральные волны существуют лишь в достаточно плотной плазме в области частот $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$. Из дисперсионных соотношений (12.6) легко показать, что в этой области частот при условии $\omega_{Ne}^2 > \omega \omega_{Be}$ может распространяться только одна волна, спектр частот которой определяется уравнением

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega_{Ne}^4 \omega^2}{c^4 k_z^2 \omega_{Be}^2} \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (12.12)$$

Частоты, определяемые этим уравнением, в случае однородной плазмы соответствуют спектру спиральной волны (8.18). Согласно уравнению (12.12) в неоднородной плазме спиральная волна может распространяться лишь в областях, где $\omega_{Ne}^2 > \sqrt{c^4 k_z^2 (k_y^2 + k_z^2) \omega_{Be}^2 / \omega^2}$.

При исследовании спиральных волн в пространственно однородной плазме (см. § 8) было показано, что их спектр остается неизменным также и в случае горячей плазмы в условиях, когда $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$. Это утверждение, очевидно, сохраняет силу и в неоднородной плазме. Аналитически продолжается в указанную область фазо-

вых скоростей также и спектр альвеновских волн (при $\omega \ll \omega_{Vi}$), который определяется дисперсионными соотношениями (12.9) и (12.11). В случае полностью ионизованной плазмы при этом существенным становится учет также и ион-ионных столкновений; поэтому в формулу (12.11) следует подставить $v_i = \frac{m}{M} v_{\alpha\phi\phi} + \frac{7}{10} v_i k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 / \omega_{Vi}^2$ (см. § 8).

Что касается магнитозвуковых волн, то их спектр в горячей плазме в области фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$, вообще говоря, меняется. Более того, наряду с быстрой магнитозвуковой волной в горячей плазме появляется также медленная магнитозвуковая волна которая может существовать только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Уравнение эйконала (11.8) для магнитозвуковых волн записывается в виде (см. (8.25))

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy}\right) \varepsilon_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yz}^2 = 0, \quad (12.13)$$

где компоненты тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x)$ определяются выражениями (7.10), (7.15), и (7.20). Пренебрегая малыми диссипативными членами и используя правила квантования (11.32), получаем следующее дисперсионное соотношение для определения спектра частот магнитозвуковых волн в неоднородной плазме:

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 + \frac{(\omega^2 - k_z^2 v_A^2)(\omega^2 - k_z^2 v_s^2)}{\omega^2(v_A^2 + v_s^2) - k_z^2 v_A^2 v_s^2} \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (12.14)$$

При написании этого соотношения мы для простоты ограничились случаем плазмы относительно высокой плотности, в которой $c^2 \gg v_A^2$ (это условие выполняется практически во всех реальных плазмах и, в частности, в ионосферной плазме также); только к такой плазме применимы, строго говоря, уравнения одножидкостной гидродинамики (3.36). В случае однородной плазмы спектр, определяемый уравнением (12.14), переходит в (8.27).

Для плазмы низкого давления, в которой $\beta = \frac{8\pi P_0}{B_0^2} \ll 1$ уравнение (12.14) распадается на два уравнения, одно из которых совпадает с (12.8) при условии $c^2 \gg v_A^2$ и определяет спектр быстрых магнитозвуковых волн (учет диссипативных эффектов при этом приводит к декременту

затухания (12.10)), а второе имеет вид

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 - k_z^2 + \frac{k_z^2 v_s^2 \omega^2}{v_A^2 (\omega^2 - k_z^2 v_s^2)} \right\}^{1/2} = \pi n. \quad (12.15)$$

Это уравнение описывает ионный звук в неизотермической магнитоактивной плазме, в которой $T_e \gg T_i$. Ионно-звуковые колебания неоднородной плазмы являются запертыми внутри плазмы в области, где $\omega^2 \lesssim \omega_{Ni}^2(x)$. Учет малых диссипативных членов в уравнении (12.15) приводит к затуханию ионно-звуковых колебаний, причем декремент затухания определяется выражением

$$\gamma = - \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{v_s^4}{v_A^2 (\omega^2 - k_z^2 v_s^2)^2} \left(v_i + \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{m}{M} \left| \frac{e_i}{e} \right| |\omega|} \right)}{2 \int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{v_s^4}{v_A^2 (\omega^2 - k_z^2 v_s^2)^2}}, \quad (12.16)$$

где $v_i = v_{in}$ в случае слабоионизованной и $v_i = \frac{5}{4} v_{ii} \frac{T_i}{T_e}$

для полностью ионизованной плазмы.

В § 8 было показано, что ионно-звуковые колебания могут существовать также и в области более высоких частот, когда $\omega > \omega_{Bi}$. В пределе очень высоких частот, когда $\omega \gg \omega_{Be}$, влиянием внешнего магнитного поля можно пренебречь. Для определения спектра ионно-звуковых колебаний в этом случае оказываются справедливыми формулы (11.38), полученные для немагнитоактивной плазмы.

Если же ω лежит в промежуточной области частот, т. е. $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$, то влияние внешнего магнитного поля существенно для движения электронов; ионы при этом действия магнитного поля практически не испытывают. Учитывая, что ионно-звуковые волны в магнитоактивной плазме с большой степенью точности являются продольными, уравнение эйконала для них в промежуточной области частот можно записать в виде

$$-k^2 v_s^2 \left(1 - i \frac{v_i}{\omega} \right) + \omega^2 \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) = 0, \quad (12.17)$$

где величина v_i определена выше (см. формулу (12.16)). Это уравнение при использовании правил квантования

(11.32) приводит к следующим дисперсионным соотношениям для определения частоты и декремента затухания колебаний γ :

$$\int dx \operatorname{Re} k_x(\omega, x) \equiv \int dx \left\{ -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{v_s^2} \right\}^{1/2} = \pi n, \quad (12.18)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \left(\frac{v_i}{v_s^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_s^3} \sqrt{\frac{m}{M} \left| \frac{e_i}{e} \right|} \right)}{\int \frac{dx}{\operatorname{Re} k_x(\omega, x)} \frac{1}{v_s^2}}.$$

При получении формул (12.17) и (12.18) мы для простоты ограничились случаем $\omega^2 \ll \omega_{Ni}^2$. В действительности ионно-звуковые колебания, как уже неоднократно подчеркивалось выше, возможны при выполнении простого неравенства $\omega^2 < \omega_{Ni}^2$. При нарушении этого неравенства колебания невозможны, так как $\operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) < 0$; в точках, где $\omega^2 = \omega_{Ni}^2(x)$, происходит отражение ионно-звуковых волн. Это обстоятельство как раз и приводит к тому, что ионно-звуковые волны в неизотермичной плазме с $T_e \gg T_i$ при колоколообразном распределении плотности частиц по x оказываются запертыми внутри плазмы.

В заключение еще раз подчеркнем, что основная ценность полученных в настоящем параграфе формул состоит в том, что они количественно точно описывают спектры собственных высокочастотных колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы, причем это проявляется отнюдь не только в квантованности спектров. В приближении геометрической оптики дискретность спектров колебаний, как уже отмечалось выше, вообще малосущественна. Однако несмотря на это, «локальные спектры», получаемые непосредственно из уравнения эйконала, могут оказаться количественно неправильными. Такое положение имеет место в случае длинноволновых и слабозатухающих колебаний, когда размер области прозрачности плазмы сравним с характерным размером ее неоднородности. В таких условиях «локальные спектры», очевидно, являются неточными; количественно правильные выражения для спектров колебаний плазмы при этом можно получить лишь с помощью интегральных соотношений (правил квантования).

§ 13. ДРЕЙФОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНОГО УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ

Как уже отмечалось в § 11, в неоднородной магнитоактивной плазме появляется новая характерная частота, так называемая ларморовская дрейфовая частота, по порядку величины равная (для частиц сорта α)

$$\omega_{др \alpha} \approx \frac{k_y v_T^2 \alpha}{\omega_{B\alpha} L_0}. \quad (13.1)$$

Это приводит к появлению в неоднородной плазме новых характерных ветвей колебаний, частоты которых $\omega \lesssim \omega_{др\alpha}$. Эти колебания качественным образом отличаются от рассмотренных в предыдущем параграфе, и в первую очередь тем, что они оказываются неустойчивыми практически при сколь угодно слабой неоднородности плазмы. Именно по этой причине дрейфовые колебания в последнее время привлекли большое внимание исследователей, занимающихся проблемой устойчивости магнитного удержания плазмы в установках для управляемого термоядерного синтеза. Мы здесь не будем, по существу, касаться вопроса проявления дрейфовой неустойчивости в реальных термоядерных установках и тех следствий, к которым она приводит. Интересующегося читателя отошлем к специальной литературе (см. [6, 41, 64], а также обзорные статьи А. Б. Михайловского и Б. Б. Кадомцева и О. П. Погуце, Р. З. Сагдеева и А. А. Галеева в сборниках [7]).

Нас будут интересовать дрейфовые колебания неоднородной магнитоактивной плазмы лишь с точки зрения их существования в ионосфере и в лабораторных условиях. Поэтому прежде всего оценим дрейфовые частоты для электронов и ионов в такой реальной неоднородной плазме. Из выражения (13.1) легко видеть, что при $T_e \sim T_i$ (как это имеет место в ионосферной плазме) дрейфовые частоты электронов и ионов одного порядка, если же $T_e \gg T_i$ (как это часто встречается в лабораторной плазме), то электронная дрейфовая частота намного превосходит ионную. Кроме того, согласно (13.1) дрейфовая частота зависит от волнового числа k_y . Если принять $k_y v_{Ti} \lesssim \omega_{Bi}$ и учесть, что характерный размер регулярной неоднородности в ионосферной плазме $L_0 \sim 100$ км, то для дрейфовой частоты получим следующую оценку:

$\omega_{др\alpha} \lesssim (10^{-3} - 10^{-1}) \text{ сек}^{-1}$ (см. табл. II). Эти частоты практически во всей ионосфере меньше или порядка частот столкновений частиц; лишь на больших высотах, сравнимых с радиусом Земли, дрейфовые частоты могут превосходить частоты столкновений частиц. Поэтому при исследовании дрейфовых колебаний ионосферной плазмы, вообще говоря, следует учитывать столкновения частиц. В связи с этим необходимо обобщить результаты § 11, где были получены выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы в области дрейфовых частот при условии пренебрежения столкновениями частиц. Что касается лабораторной плазмы, то в газовом разряде $L_0 \sim 1 - 3 \text{ см}$ и при $B_0 \sim 10^3 \text{ гс}$ (см. табл. IV) для электронной дрейфовой частоты имеем оценку $\omega_{др e} \sim 10^4 - 10^5 \text{ сек}^{-1}$; ионные дрейфовые частоты в газовом разряде, как правило, на порядок ниже из-за неизотермичности плазмы, $T_e \gg T_i$. В зависимости от конкретных экспериментальных условий эти частоты оказываются как больше, так и меньше частот столкновений частиц. В высокотемпературной же плазме в установках управляемого термоядерного синтеза, где $L_0 \sim 3 - 10 \text{ см}$, а $B_0 \sim 10^4 - 10^5 \text{ гс}$, дрейфовые частоты электронов и ионов порядка $\omega_{др\alpha} \sim 10^5 - 10^6 \text{ сек}^{-1}$ и всегда превосходят частоты столкновений частиц.

Отметим, далее, следующее существенное обстоятельство: как в лабораторной, так и в ионосферной плазме обычно с большим запасом выполнено неравенство $\beta = \frac{8\pi P_0}{B_0^2} \ll 1$. Это позволяет при исследовании малых колебаний плазмы пренебречь возмущением магнитного поля и считать колебания потенциальными, т. е. принять $E = -\text{grad } \Phi$. В случае однородной магнитоактивной плазмы мы на конкретных вычислениях убедились в том, что при $\beta \ll 1$ электромагнитные колебания поля в плазме с большой степенью точности являются потенциальными (см. § 8). Учитывая сказанное, ниже мы ограничимся вычислением лишь продольной диэлектрической проницаемости, характеризующей спектр потенциальных колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы.

С другой стороны, говорить о ларморовском дрейфе частиц и, следовательно, о дрейфовых колебаниях плазмы, очевидно, можно лишь в условиях, когда за время ларморовского вращения частицы практически не сталкиваются, т. е. $\omega_{B\alpha} \gg \nu_\alpha$ (для $\alpha = e, i$). В ионосферной плазме это условие хорошо выполняется на высотах больше 200 км,

где плазму можно считать полностью ионизованной и пренебречь столкновениями заряженных частиц с нейтральными молекулами. И в лабораторной плазме указанное условие выполняется только при достаточно высокой степени ионизации, когда роль столкновений заряженных частиц с нейтральными пренебрежимо мала. Поэтому ниже мы ограничимся учетом только кулоновских столкновений заряженных частиц между собой.

При исследовании дрейфовых колебаний неоднородной плазмы следует различать два предельных случая: кинетический и гидродинамический. Первый из них связан с необходимостью последовательного использования кинетической теории и с решением кинетических уравнений, в которых фигурируют интегралы столкновений частиц (см. уравнение (4.10)). Напротив, в гидродинамическом пределе нет необходимости в решении кинетических уравнений и все результаты могут быть получены с помощью уравнений двухжидкостной гидродинамики (4.20) — (4.24).

Очевидно, второй случай значительно проще первого. Поэтому анализ дрейфовых колебаний неоднородной плазмы мы начнем с кинетического случая. Прежде всего отметим, что в условиях, когда ларморовские частоты значительно больше эффективных частот столкновений, т. е. $\omega_{V\alpha} \gg \nu_\alpha$, влиянием столкновений на равновесные функции распределения частиц можно пренебречь. Выберем поэтому равновесные функции распределения частиц такими же, как и в бесстолкновительной плазме, т. е. в виде (11.14), где $F_{0\alpha}(E_\alpha, x)$ — локально неоднородное распределение Максвелла (11.15).

Для изучения колебаний и устойчивости плазмы с распределением частиц (11.14) рассмотрим малые отклонения от таких распределений, сопровождающиеся малыми возмущениями полей.

Благодаря малости кинетического давления плазмы по сравнению с магнитным, как отмечалось выше, можно пренебречь возмущением магнитного поля и ограничиться лишь учетом потенциального электрического поля $E = -\nabla\Phi$.

Имея в виду, что равновесное распределение не зависит от координат y и z , будем искать решения кинетических уравнений для малых возмущений функций распределения в виде

$$\delta f_\alpha(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z).$$

Тогда линеаризованное кинетическое уравнение (4.10) для неравновесной добавки к функции распределения можно записать следующим образом:

$$-i(\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_\alpha + v_x \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial x} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = \frac{e}{m} \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} + \sum_{\beta} \left(\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}. \quad (13.2)$$

Здесь φ — азимутальный угол в пространстве скоростей (полярная ось направлена вдоль магнитного поля), а $\left(\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}$ — линеаризованный интеграл столкновений заряженных частиц сорта α с частицами сорта β :

$$\left(\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3} \times \\ \times \left\{ f_{0\beta}(\mathbf{p}') \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial p_j} + \delta f_{\beta}(\mathbf{p}') \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j} - f_{0\alpha}(\mathbf{p}) \frac{\partial \delta f_\beta}{\partial p'_j} - \delta f_\alpha(\mathbf{p}) \frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p'_j} \right\}, \quad (13.3)$$

где $L = \ln(r_D/r_{\min})$ — кулоновский логарифм, а $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$. Суммирование в правой части уравнения (13.2) ведется по всем сортам заряженных частиц плазмы.

Ограничиваясь возмущениями с длиной волны вдоль направления x , много меньшей характерного размера неоднородности L_0 , можно искать решение уравнения (13.2) в виде $\sim \exp(i \int k_x dx)$. Тогда, решая систему кинетических уравнений для электронов и ионов, в нулевом приближении геометрической оптики найдем выражение для плотности заряда, индуцированного в плазме потенциальным неравновесным электрическим полем:

$$\delta \rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p} \delta f_{\alpha} = \frac{k^2}{4\pi} [1 - \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)] \Phi. \quad (13.4)$$

Определенная таким образом продольная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \delta\varepsilon_e + \delta\varepsilon_i \quad (13.5)$$

ниже используется для изучения потенциальных колебаний неоднородной плазмы. Здесь $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$ — соответственно вклады, обусловленные электронами и ионами. Вычисление $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$ в общем случае произвольных

частот и длин волн колебаний весьма сложная задача. Но в этом и нет необходимости. Для описания всей картины дрейфовых колебаний в целом достаточно исследовать различные предельные случаи, в которых вычисление $\varepsilon(\omega, k, x)$ не представляет труда.

В реальной неоднородной плазме, как в ионосферной, так и лабораторной имеется ряд упрощающих обстоятельств, облегчающих анализ дрейфовых колебаний. Во-первых, как уже отмечалось выше, дрейфовые частоты в неоднородной плазме как ионосферной, так и лабораторной являются очень низкими и удовлетворяют условию $\omega_{др} \ll \omega_{Vi}$. Во-вторых, исследование дрейфовых колебаний в ионосферной плазме, с нашей точки зрения, представляет интерес в связи со случайными ионосферными неоднородностями (см., например, [10, 44]), которые могут быть истолкованы как проявление дрейфовой неустойчивости ионосферной плазмы. Размеры ионосферных неоднородностей в направлении, перпендикулярном магнитному полю Земли, больше или порядка 10—100 м, что значительно превосходит ларморовский радиус ионов (и тем более электронов). Что касается лабораторной плазмы, то дрейфовые колебания в такой плазме представляют интерес с точки зрения устойчивости магнитного удержания. При этом размеры плазмы, как правило, намного превосходят ларморовский радиус ионов, а с точки зрения устойчивости магнитного удержания плазмы наиболее опасны длинноволновые возмущения с длиной волны, сравнимой с размером неоднородности плазмы. Учитывая сказанное, ниже мы ограничимся исследованием лишь длинноволновых (с длиной волны больше ларморовского радиуса ионов) и низкочастотных ($\omega \ll \omega_{Vi}$) дрейфовых колебаний неоднородной плазмы*). В результате число различных возможных предельных случаев для диэлектрической проницаемости оказывается небольшим.

Прежде всего отметим, что при $|\omega + iv_e| \ll k_z v_{Te}$ и $|\omega + iv_i| \ll k_z v_{Ti}$, т. е. когда фазовые скорости волн меньше тепловых скоростей как электронов, так и ионов, а длины волн колебаний меньше длины свободного пробега частиц, столкновениями частиц в плазме, очевидно, полнос-

*) Наиболее полный анализ дрейфовых колебаний неоднородной плазмы со столкновениями в широкой области частот и длин волн проведен в монографии [6] и обзорных работах [41, 68]. Там же можно найти более подробный вывод приведенных ниже формул.

тью можно пренебречь. Решение уравнения (13.2) для электронов и ионов, а следовательно, и диэлектрическая проницаемость (13.5) при этом имеют такой же вид, как и в случае бесстолкновительной плазмы (см. формулу (11.24)). В бесстолкновительной же плазме в этих условиях длинноволновые потенциальные колебания невозможны; происходит дебаевская экранировка поля. Поэтому ниже всюду считается, что $|\omega + iv_i| \gg k_z v_{Ti}$.

Если продольная длина волны колебаний мала как по сравнению с длиной пробега электрона, так и по сравнению с расстоянием, проходимым тепловым электроном за период рассматриваемых колебаний, т. е. $|\omega + iv_e| \ll k_z v_{Te}$, то столкновениями в уравнении (13.2) для электронов можно пренебречь и использовать результат теории плазмы без столкновения (см. (11.24)):

$$\delta \varepsilon_e = \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left\{ 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) \right\}. \quad (13.6)$$

Здесь диссипативный вклад обусловлен эффектом Черенкова на электронах.

Напротив, если продольная длина волны колебаний значительно превышает длину свободного пробега электронов, то эффект Черенкова пренебрежимо мал; в этом случае диссипативные эффекты обусловлены столкновениями электронов. Если, кроме того, частота рассматриваемых колебаний значительно превышает частоту столкновений, $\omega \gg \nu_e \gtrsim k_z v_{Te}$, то нетрудно найти решение кинетического уравнения (13.2) с помощью разложения по степеням ν_e/ω . В результате получаем

$$\delta \varepsilon_e = \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left\{ \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N T_e}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \frac{\nu_{эфф}}{\omega} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) \right\}, \quad (13.6a)$$

где величина $\nu_{эфф}$ характеризует столкновения электронов с ионами и определена соотношением (4.42).

Наконец, в условиях, когда длина свободного пробега оказывается меньше как продольной длины волны, так и расстояния, проходимого тепловым электроном за период колебаний ($\nu_e \gg \omega, k_z v_{Te}$), в кинетическом уравнении (13.2) для электронов самым старшим членом стано-

вится интеграл столкновений. При этом решение кинетического уравнения можно найти с помощью метода Чепмена — Энскога (см. [16]). Это дает

$$\delta\epsilon_e = \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left\{ \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + i \cdot 1,96 \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega v_{\phi\Phi}} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial x} \ln (NT_e^{1,71}) \right) \right\} \quad (13.7a)$$

в пределе $\omega v_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$ и

$$\delta\epsilon_e = \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left\{ 1 + i \cdot 1,44 \frac{\omega v_{\phi\Phi}}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{T^{0,56}} \right) \right\}, \quad (13.7b)$$

когда $\omega v_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$.

Перейдем теперь к рассмотрению ионного вклада в диэлектрическую проницаемость. С помощью простого метода последовательных приближений можно легко найти решение кинетического уравнения (13.2) для ионов, соответствующее пределу $\omega \gg \nu_i$. Считая, кроме того, частоту ω малой по сравнению с ларморовской частотой ионов, получаем

$$\delta\epsilon_i = \frac{\omega_{Ni}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \left[\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \right] \right) \times \right. \\ \left. \times A_0 \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Ti}} \right) \right\} + \delta\epsilon_{ii}. \quad (13.8)$$

Первое слагаемое здесь соответствует слагаемому, получаемому в теории плазмы без столкновений (см. (11.24)); второе слагаемое, $\delta\epsilon_{ii}$, обусловлено столкновениями ионов с ионами (столкновения ионов с электронами приводят к поправкам порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$, и ими можно пренебречь).

В интересующем нас пределе длинных волн колебаний, когда $k_{\perp}^2 \rho_i^2 = k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 / \omega_{Bi}^2 \ll 1$, имеем

$$\delta\epsilon_{ii} = \frac{i}{10} \frac{\nu_{ii}}{\omega} \frac{v_{Ti}^2 \omega_{Bi}^2}{k^2} \left\{ \left(16 \frac{k_z^4}{\omega^4} + 28 \frac{k_z^2 k_{\perp}^2}{\omega^2 \omega_{Bi}^2} + 7 \frac{k_{\perp}^4}{\omega_{Bi}^4} \right) \times \right. \\ \times \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) - \\ \left. - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x} \left(24 \frac{k_z^4}{\omega^4} + \frac{33}{2} \frac{k_z^2 k_{\perp}^2}{\omega^2 \omega_{Bi}^2} - \frac{3}{4} \frac{k_{\perp}^4}{\omega_{Bi}^4} \right) \right\}, \quad (13.9)$$

где ν_{ii} — частота ион-ионных столкновений, определенная соотношением (4.42).

При выводе формулы (13.9) столкновения ионов считались сравнительно редкими $\omega \gg \nu_i$, что характерно для кинетической (не гидродинамической) области колебаний. Как уже считалось выше, решение кинетического уравнения (13.2) для ионов получается методом теории возмущений. Реальным параметром разложения при этом, как это легко видеть из формулы (13.9), является $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \nu_{ii} / \omega$.

Формулы (13.5) — (13.9) полностью охватывают кинетический предел длинноволновых дрейфовых колебаний. Наряду с кинетическим пределом мы рассмотрим также дрейфовые колебания неоднородной плазмы в гидродинамическом пределе, справедливом в области самых низких частот и длинных волн, когда $\nu_{\alpha} \gg \omega$ и $\nu_{\alpha} \gg k_z v_{T\alpha}$ (для $\alpha = e, i$).

В гидродинамической области, однако, вводить понятие диэлектрической проницаемости нецелесообразно. При исследовании малых колебаний плазмы в гидродинамической области удобнее исходить непосредственно из уравнений двухжидкостной гидродинамики (4.20) — (4.24). Поэтому гидродинамические дрейфовые колебания плазмы будут рассмотрены ниже при анализе конкретных спектров.

а) Дрейфовые колебания плазмы. Перейдем теперь к исследованию конкретных спектров дрейфовых колебаний плазмы.

Согласно методу геометрической оптики для определения спектров колебаний потенциального поля следует исходить из уравнения эйконала

$$\epsilon(\omega, k, x) = 0. \quad (13.10)$$

Подставляя в это уравнение полученные выше выражения для продольной диэлектрической проницаемости, найдем компоненту волнового вектора $k_x(\omega, x)$ как комплексную функцию координаты и комплексной частоты ω . Используя затем квазиклассические правила квантования (11.31) и (11.32), находим дисперсионное соотношение, определяющее спектр плазменных колебаний, который, в частности, дает ответ на вопрос об устойчивости плазмы.

Среди возможных колебаний, описываемых геометрической оптикой, могут быть такие, для которых благодаря плавной зависимости диэлектрической проницаемости от

координат правильный порядок величины собственных частот и правильный ответ об устойчивости плазмы дают так называемые «локальные спектры», получаемые непосредственно из уравнения эйконала (13.10). Здесь мы ограничимся исследованием именно таких локальных спектров дрейфовых колебаний неоднородной плазмы. Заметим при этом, что написание более точных дисперсионных соотношений, основанных на правилах квантования, не представляет большого труда *).

В области

$$|\omega + iv_e| \ll k_z v_{Te}, \quad \omega \gg v_i k_{\perp}^2 \rho_i^2$$

уравнение эйконала (13.10) для длинноволновых колебаний плазмы, $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$, записывается в виде

$$1 + \frac{\omega_{Ne}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left\{ 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\omega_{Ni}^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left\{ \left(k_{\perp}^2 \rho_i^2 - \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} \right) + \right.$$

$$+ \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{i}{10} \frac{v_{ii}}{\omega} \left[\left(16 \frac{k_z^4 v_{Ti}^4}{\omega^4} + 28 \frac{k_z^2 k_{\perp}^2 v_{Ti}^4}{\omega^2 \omega_{Bi}^2} + \right. \right.$$

$$+ \left. \left. 7 \frac{k_{\perp}^4 v_{Ti}^4}{\omega_{Bi}^4} \right) \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x} \left(24 \frac{k_z^4 v_{Ti}^4}{\omega^4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{33}{2} \frac{k_z^2 k_{\perp}^2 v_{Ti}^4}{\omega^2 \omega_{Bi}^2} - \frac{3}{4} \frac{k_{\perp}^4 v_{Ti}^4}{\omega_{Bi}^4} \right) \right] \left. \right\} = 0. \quad (13.11)$$

Можно показать, что рассматриваемые колебания могут быть неустойчивыми лишь при условии $\omega_{др} \sim \frac{k_y v_T}{\omega_B} \frac{1}{L_0} \gg \gg k_z v_s \sim k_z \sqrt{\frac{T_e}{M}}$. При этом существуют четыре ветви

*) Такие соотношения обосновывают и количественно уточняют локальные спектры дрейфовых колебаний. В ряде случаев, например, при наличии перекрещенности силовых линий магнитного поля (shear) они приводят также и к качественно новым спектрам, которые не могут быть получены путем локального анализа уравнения (13.10) (подробно см. [41]).

неустойчивых колебаний ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$, $\gamma \ll \omega$):

$$\omega_1 \approx - \frac{k_y v_s^2}{(1 + k^2 r_{De}^2) \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1^2}{|k_z| v_{Te}} \left[\frac{k^2 r_{De}^2 + \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N}\right) \frac{k_{\perp}^2 v_s^2}{\omega_{Bi}^2}}{1 + k^2 r_{De}^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right] - \frac{7}{10} v_{ii} \frac{k_{\perp}^4 v_{Ti}^4}{\omega_{Bi}^4} \left[\left(1 + \frac{T_e}{T_i} + k^2 r_{De}^2\right) - \right. \\ \left. - (1 + k^2 r_{De}^2) \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right]; \quad (13.12)$$

$$\omega_2 = \frac{k_z^2 \omega_{Bi}}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}}, \quad (13.13)$$

$$\gamma_2 = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_2^2}{|k_z| v_{Te}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N}\right) - \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2};$$

$$\omega_3^2 = - k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}; \quad (13.14)$$

$$\omega_4^3 = - k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}. \quad (13.15)$$

Две последние ветви соответствуют аperiodически нарастающим (а поэтому не зависящим от характера диссипации) колебаниям неоднородной плазмы ($\text{Re } \omega \sim \text{Im } \omega > 0$) и возможны лишь при условии $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$. Вторая ветвь существует только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$; видно, что ион-ионные столкновения для таких колебаний играют стабилизирующую роль, в то время как черенковский эффект на электронах может привести к их раскачке, если $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$. Обратное положение имеет место для первой ветви колебаний, где черенковская диссипация на электронах при условии $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2 (k^2 r_{De}^2 + k_{\perp}^2 \rho_i^2)$ стабилизирует колебания, а ион-ионные столкновения

могут привести к их раскачке, если $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > \frac{28}{3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)$,

а $k_{\perp}^2 \omega_1^2 > k_z^2 \omega_{Bi}^2$.

Из рассмотренных колебаний в ионосферной плазме возможны дрейфовые колебания, описываемые формулами (13.12) (первая ветвь). Более того, в ионосфере на высотах больше 300—400 км эти колебания оказываются неустойчивыми ($\gamma > 0$), так как в этой области $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 0$ (см. табл. I) и черенковский эффект на электронах приводит к раскачке этих колебаний. Такие неустойчивые колебания в ионосфере могут проявляться в виде случайных неоднородностей с размерами порядка длины волны *) $L_{\perp} \sim \sim \lambda_{\perp} \gtrsim 100$ м, $L_{\parallel} \sim \lambda_{\parallel} \gtrsim 10 \div 100$ км и временем жизни порядка периода колебаний $\tau \sim 1/\omega_{др} \gtrsim 10^2 - 10^3$ сек. Что касается лабораторной плазмы, то условия существования рассмотренных колебаний хорошо выполняются в высокотемпературной плазме в установках управляемого термоядерного синтеза (см. табл. IV). И здесь также наиболее вероятным является возбуждение первой ветви неустойчивых колебаний со спектром (13.12), что, по-видимому, и становится причиной аномальной диффузии плазмы поперек магнитного поля в реальных экспериментальных установках (см. обзоры Н. Крола и Н. Даянжело в сборнике [69]).

Рассмотрим теперь длинноволновые ($k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$) дрейфовые колебания в области частот $\omega \gtrsim v_e \gtrsim k_z v_{Te}$. Уравнение эйконала (13.10) в этой области частот записывается в виде

$$1 - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N T_e}{\partial x} - i \frac{v_{эфф}}{\omega} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) \right] + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} \left\{ 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x} + i \frac{7}{10} \frac{v_{ii}}{\omega} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 - \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right) \right] \right\} = 0. \quad (13.16)$$

Видно, что при $k_z = 0$ это уравнение имеет решение в

*) Нижние индексы \perp и \parallel указывают направления соответственно поперек и вдоль магнитного поля Земли.

виде локального спектра

$$\omega = \frac{1}{1 + v_A^2/c^2} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}, \quad (13.17)$$

$$\gamma = \frac{v_{ii}}{40} \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{1 + v_A^2/c^2} \frac{\partial \ln N}{\partial \ln T_i} \left[28 \frac{v_A^2}{c^2} - \left(31 + 3 \frac{v_A^2}{c^2} \right) \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right],$$

которое при условии $\left(31 + 3 \frac{v_A^2}{c^2} \right) \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 28 \frac{v_A^2}{c^2}$ соответствует неустойчивым колебаниям, причем раскачка колебаний обусловлена ион-ионными столкновениями.

Для справедливости локального спектра (13.17), наряду с условием $\omega \gg v_e$, необходимо выполнение неравенства $\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} < \frac{m}{M} \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2}$. В обратном пределе (но при условии $\omega \gg k_z v_{Te}$) дрейфовая ветвь (13.17) переходит в колебания с локальным спектром

$$\omega = - \frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}, \quad \gamma = v_{\text{эфф}} \frac{\partial \ln T_e^{3/2}}{\partial \ln NT_e} \quad (13.18)$$

Как легко видеть, эти колебания являются неустойчивыми при условиях $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 0$ либо $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < -1$, причем за раскачку колебаний ответственны столкновения электронов с ионами.

Наконец, в рассматриваемой области частот ($\omega \gg v_e$, $k_z v_{Te}$) при условии $\omega \ll \omega_{\text{др} \alpha}$ в неоднородной магнитоактивной плазме возможна аperiodическая неустойчивость, инкремент развития которой согласно (13.16) определяется соотношением

$$\omega^2 = - \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{T_e}{T_i} \frac{M}{m} \omega_{Bi}^2 \frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}. \quad (13.19)$$

Наблюдение дрейфовых колебаний со спектрами (13.17) — (13.19) в реальной плазме сильно затруднено, поскольку они возможны лишь при условиях, когда продольные размеры плазмы превышают поперечные более чем в M/m раз. В ионосфере такие колебания могут проявиться только на очень больших высотах, превышающих несколько радиусов Земли (это следует из неравенства $\omega_{\text{др} \alpha} \gg v_e$).

Из дрейфовых колебаний в кинетической области частот и длин волн нам осталось исследовать колебания при условиях $v_e \gg \omega \gg v_i$ и $v_e \gg k_z v_{Te}$. Если, кроме того, $\omega v_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$, то уравнение эйконала (13.10) имеет вид

$$1 + i \cdot 1,96 \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega \omega_{\text{эфф}}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} \left\{ 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x} + i \cdot \frac{7}{10} \frac{v_{ii}}{\omega} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 - \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right) \right] \right\} = 0. \quad (13.20)$$

Разрешив это уравнение относительно ω , находим следующие три ветви дрейфовых колебаний неоднородной плазмы:

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + v_A^2/c^2} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}, \quad (13.21)$$

$$\gamma_1 = \frac{v_{ii}}{40} \frac{k_{\perp}^2 \rho_i^2}{1 + v_A^2/c^2} \frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i} \left[28 \frac{v_A^2}{c^2} - \left(31 + 3 \frac{v_A^2}{c^2} \right) \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right]$$

(это справедливо при $\omega_1 \sim \omega_{\text{др}} \gg \omega_s$ и совпадает с (13.17));

$$\omega_2 = - \frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}, \quad (13.22)$$

$$\gamma_2 = \frac{\omega_2^2}{1,96 \omega_s} \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e^{1,71}} \right)$$

(справедливо при $\omega_2 \sim \omega_{\text{др}} \ll \omega_s$) и, наконец,

$$\omega_3 = i \cdot 1,96 \omega_s \frac{T_e}{T_i} \frac{\partial \ln T_e^{1,71}}{\partial \ln NT_i} \quad (13.23)$$

(справедливо при $\omega_3 \sim \omega_s \ll \omega_{\text{др}}$). Здесь

$$\omega_s = \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{M}{m} \frac{\omega_{Bi}^2}{v_{\text{эфф}}}.$$

Эти ветви являются практически всегда неустойчивыми, причем раскачка колебаний в них обусловлена столкновениями частиц в плазме. В ионосферной плазме такие колебания возможны в условиях, когда $v_e \gg \omega_{\text{др}} \sim \sim 10^{-3} - 10^{-1} \text{ сек}^{-1} > v_i$ (что выполняется только на больших высотах, превышающих 1000 км). С ними могут быть

связаны неоднородности с продольным (вдоль магнитного поля Земли) размером $L_{\parallel} \sim L_0 \gtrsim 10 - 100$ км. В случае же лабораторной плазмы условия существования рассмотренных дрейфовых ветвей колебаний характерны для не очень плотной и относительно низкотемпературной плазмы газового разряда. Более того, именно путем идентификации этих ветвей наиболее удобным оказалось экспериментальное исследование дрейфовых колебаний плазмы (см. обзор Н. Данжело в сборнике [69]).

Наконец, если $\omega v_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$, то характер дрейфовых колебаний неоднородной плазмы в области частот $\nu_e \gg \omega$; $\nu_e \gg k_z v_{Te}$; $\omega \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ существенным образом зависит от теплопроводности электронов. Электронный вклад в диэлектрическую проницаемость плазмы в этом случае определяется выражением (13.76), которое подобно (13.6) и отличается от него лишь диссипативным слагаемым; в выражении (13.6) диссипативное слагаемое обусловлено бесстолкновительным черенковским поглощением волн электронами плазмы, в то время как в формуле (13.76) диссипативный член связан с электронной теплопроводностью, определяемой столкновениями электронов. В результате уравнение эйконала для дрейфовых колебаний в рассматриваемой области частот и длин волн оказывается подобным уравнению (13.11), а поэтому спектры частот колебаний совпадают с (13.12) — (13.15). Изменяются лишь выражения для инкрементов нарастания γ_1 и γ_2 , определяющиеся диссипативными процессами в плазме:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & 1,44 \frac{\omega_1^2 \nu_{эфф}}{k_z^2 v_{Te}^2} \times \\ & \times \left[\frac{k_{\perp}^2 v_s^2}{\omega_{Bi}^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right) - \frac{\partial \ln T_e^{0,56}}{\partial \ln N} \right] - \\ & - \frac{7}{10} \nu_{ii} k_{\perp}^4 \rho_i^4 \left[1 + \frac{T_e}{T_i} + k^2 r_{De}^2 - \frac{3}{28} (1 + k^2 r_{De}^2) \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right], \quad (13.24) \\ \gamma_2 = & -1,44 \frac{\omega_2^2 \nu_{эфф}}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 - \frac{\partial \ln T_e^{0,56}}{\partial \ln N} \right) - \frac{8}{5} \nu_{ii} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2}. \end{aligned}$$

Это приводит к изменению роли диссипативных процессов в раскачке колебаний. Видно, что для первой ветви колебаний столкновения электронов играют стабилизирующую

роль при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 1,8 \left[k^2 r_{De}^2 + \frac{k_{\perp}^2 v_s^2}{\omega_{Bi}^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right) \right]$,

а для второй $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 1,8$. Роль диссипации на ионах при этом остается неизменной (см. обсуждение формул (13.12) — (13.15)).

В заключение этого раздела рассмотрим гидродинамические дрейфовые колебания неоднородной плазмы, лежащие в области спектра $\nu_{\alpha} \gg \omega$, $k_z \nu T_{\alpha}$ (для $\alpha = e, i$). Такие колебания, видимо, представляют наибольший интерес для объяснения ионосферных неоднородностей, наблюдаемых в нижних слоях ионосферы. Как уже отмечалось выше, при анализе гидродинамических колебаний удобно исходить из уравнений двухжидкостной гидродинамики (4.20) — (4.24). Линеаризуя эту систему и ограничиваясь для простоты случаем изотермической плазмы $T_e = T_i = T$ (имея в виду ионосферную плазму), для малых колебаний можно получить следующее уравнение эйконала *):

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + i \cdot \frac{2}{3} \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^e}{\omega N} \right) \left(1 + i \cdot \frac{2}{3} \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^i}{\omega N} \right) + 4i \cdot \frac{m}{M} \frac{v_e}{\omega} \times \right. \\ & \times \left. \left(1 + i \cdot \frac{4}{3} \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^e}{\omega N} + i \cdot \frac{4}{3} \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^i}{\omega N} \right) \right] \left[\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) \times \right. \\ & \cdot \left. \times \left(1 + i \cdot \frac{4}{3} \frac{k_z^2 \eta_0^i}{\omega N M} \right) - 2 \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right] + \frac{2}{3} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \times \\ & \times \left\{ i \cdot \frac{2}{3} \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^e}{\omega N} \left[\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} \right) - 1 \right] - \right. \\ & \left. - \left(1 + 4i \cdot \frac{m}{M} \frac{v_e}{\omega} \right) \left(2 + 1,42 \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln N T^{-3/2}}{\partial x} \right) \right\} + \\ & + 1,71 \left(1 - i \cdot \frac{4}{3} \frac{k_z^2 \eta_0^i}{\omega N M} \right) \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \omega_{Be}} \frac{\partial \ln T}{\partial x} \times \\ & \times \left(1 + i \cdot \frac{2}{3} \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^i}{\omega N} - 4i \frac{m}{M} \frac{v_e}{\omega} \right) = 0, \quad (13.25) \end{aligned}$$

*) При получении уравнения (13.25) мы пренебрегли членами порядка $\sim k_{\perp}^2 \rho_i^2$, а также вкладом вязких членов, связанных с движением частиц поперек магнитного поля. В таком приближении гидродинамические дрейфовые колебания неоднородной плазмы были исследованы в работах [70] (см. также [6]).

где $\chi_{\parallel}^{\alpha}$ и η_0^{α} (для $\alpha = e, i$) — соответственно коэффициенты теплопроводности и вязкости (см. (4.30), (4.32), (4.36) и (4.37)), причем $\chi_{\parallel}^{\alpha} \sim NT_{\alpha}/m_{\alpha}v_{\alpha}$, а $\eta_0^{\alpha} \sim NT_{\alpha}/v_{\alpha}$.

Прежде всего заметим, что в области самых низких частот, когда $\omega \ll k_z^2 \chi_{\parallel}^{\alpha}/N \sim k_z^2 v_{T\alpha}^2/v_{\alpha}$, колебания, как легко видеть из уравнений (13.25), невозможны; имеет место дебаевская экранировка поля в плазме. Поэтому здесь мы рассмотрим колебания в области высоких

$$\omega \gg k_z^2 \chi_{\parallel}^{\alpha}/N \sim k_z^2 v_{T\alpha}^2/v_{\alpha}$$

и промежуточных

$$k_z^2 \chi_{\parallel}^e/N \gg \omega \gg k_z^2 \chi_{\parallel}^i/N$$

частот (т. е. $k_z^2 v_{Te}^2/v_e \gg \omega \gg k_z^2 v_{Ti}^2/v_i$).

При $\omega \gg k_z^2 \chi_{\parallel}^{\alpha}/N \sim k_z^2 v_{T\alpha}^2/v_{\alpha}$ уравнение (13.25) определяет следующие локальные спектры гидродинамических дрейфовых колебаний: спектр

$$\omega = -\frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial}{\partial x} \ln NT^{1,71} - \frac{2}{3} i \cdot 1,71 \frac{k_z^2 \chi_{\parallel}^e}{N} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln NT^{1,71}}, \quad (13.26)$$

справедливый в пределе $\omega \sim \omega_{др} \gg \frac{m}{M} v_{эфф}$, $k_z v_{Ti}$, и спектр

$$\omega^2 = -0,95 k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln NT^{-3/2}}{\partial \ln NT^{1,71}}, \quad (13.27)$$

справедливый в условиях, когда $\omega \ll \frac{m}{M} v_{эфф} \ll \omega_{др} \sim$

$\sim \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha} L_0}$ (так как $T_e = T_i = T$, то $\omega_{дрe} = -\omega_{дрi} = -\omega_{др}$). Видно, что раскачка колебаний на первой ветви, описываемой выражением (13.26), возможна лишь в плазме с неоднородной температурой, когда $0 > \frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} > -1/1,71 \approx -0,59$. Колебания же на второй ветви практически всегда неустойчивы; условие неустойчивости имеет вид $-0,59 < \frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} < \frac{2}{3}$.

В области промежуточных частот $k_z^2 \chi_{\parallel}^e/N \gg \omega \gg \gg k_z^2 \chi_{\parallel}^i/N$ уравнение (13.25) имеет решения, соответствующие неустойчивым колебаниям лишь при условии

$\omega_{др} > \omega \gg \frac{m}{M} v_{эфф}$. Пренебрегая малыми диссипативными членами, из уравнения (13.25) получаем следующие локальные спектры двух неустойчивых ветвей дрейфовых колебаний: спектр

$$\omega^2 = k_z^2 v_{Ti}^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} \right), \quad (13.28)$$

справедливый при $\omega \ll \omega_{др}$, и спектр

$$\omega^3 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T}{\partial x}, \quad (13.29)$$

справедливый в условиях, когда $\omega \ll \omega_{др}$, а $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} \gg 1$.

Легко видеть, что колебания на первой ветви неустойчивы при условии $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} > \frac{2}{3}$, в то время как на второй ветви они неустойчивы лишь в случае, если $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} \gg 1$ (это следует из условия применимости формулы (13.29)). При выполнении указанных условий в плазме развиваются аperiодические неустойчивости с инкрементом нарастания $\gamma = \text{Im } \omega \gtrsim k_z v_{Ti}$. Следует заметить, что спектр (13.29) является продолжением спектра (13.15) в область гидродинамических колебаний.

Как указывалось выше, гидродинамические неустойчивости неоднородной магнитоактивной плазмы представляют большой интерес с точки зрения приложений к ионосферным неоднородностям. Во-первых, такие неустойчивости могут развиваться на относительно небольших высотах 200—500 км. Во-вторых, с ними могут быть связаны наиболее часто наблюдаемые ионосферные неоднородности, не очень сильно вытянутые вдоль магнитного поля Земли, с продольными размерами $L_{\parallel} \sim 1 \div 10$ км (для исследованных выше кинетических неустойчивостей была характерна сильная вытянутость вдоль магнитного поля). В лабораторных условиях рассмотренные дрейфовые колебания могут наблюдаться в плотной низкотемпературной плазме газового разряда с большим числом столкновений частиц.

В таблицах IX—XIII, приведенных в конце настоящего параграфа, сведены спектры исследованных выше дрейфовых колебаний неоднородной магнитоактивной плазмы (как кинетических, так и гидродинамических). Наряду со спектрами в этих таблицах указаны инкременты нараста-

ния колебаний, области частот и длин волн колебаний, а также условия их раскачки.

б) Неустойчивость анизотропной плазмы с током. Выше мы всюду рассматривали колебания неоднородной плазмы с изотропной невозмущенной функцией распределения частиц по скоростям (11.15) (или в отсутствие направленных потоков, если речь шла о гидродинамических колебаниях). Естественно, что при наличии анизотропии невозмущенной функции распределения частиц (например, обусловленной током) в неоднородной плазме следует ожидать появления новых неустойчивостей, отсутствующих в плазме с изотропным распределением. В рамках настоящей монографии мы не в состоянии осветить вопрос об устойчивости анизотропной неоднородной плазмы подробно. Однако было бы весьма неразумно совершенно не коснуться этого вопроса, играющего фундаментальную роль в проблеме магнитного удержания. Поэтому ниже мы рассмотрим два простых примера из теории устойчивости неоднородной анизотропной плазмы с током*), имеющих большое значение для физики горячей (термоядерной) плазмы. Речь пойдет об устойчивости плазмы в магнитном поле при наличии либо кривизны магнитных силовых линий, либо продольного тока. Как в первом, так и во втором случае частицы плазмы, наряду с тепловым движением, совершают также направленное движение (дрейф), причем в первом случае дрейф частиц обусловлен кривизной силовых линий магнитного поля и по порядку величины равен

$$u_{\alpha} = -g_{\alpha}/\omega_{B\alpha} \quad (\text{для } \alpha = e, i),$$

где $g_{\alpha} \approx v_{T\alpha}^2/R$ (R — радиус кривизны магнитных силовых линий, см. § 3), а во втором он связан с продольным током (дрейф электронов относительно ионов со средней скоростью u).

В случае бесстолкновительной неоднородной плазмы (в настоящем разделе мы ограничиваемся рассмотрением только такой плазмы) выражение для продольной диэлектрической проницаемости легко получить непосредственно из выражения (11.24), заменяя в нем ω на $\omega'_{\alpha} = \omega - ku_{\alpha}$, где u_{α} — скорость дрейфа частиц сорта α . Такой

*) В отличие от диамагнитного тока, обусловленного неоднородностью плазмы (см. § 11), здесь речь идет о токе в невозмущенном состоянии в отсутствие неоднородности и об анизотропии функции $F_{0\alpha}(E_{\alpha}, x)$.

результат следует согласно методу, изложенному в § 9. Учитывая сказанное, для низкочастотных потенциальных колебаний поля ($\omega'_\alpha \ll \omega_{B\alpha}$ для $\alpha = e, i$) получаем следующее уравнение эйконала:

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega'_\alpha}{\omega'_\alpha - s\omega_{Bs}} \left(1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_\alpha} \right] \right) A_s \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega'_\alpha - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \right\} = 0. \quad (13.30)$$

Проанализируем это уравнение в пределе холодной плазмы, т. е. при

$$k_\perp^2 v_{T\alpha}^2 \ll \omega_{B\alpha}^2 \quad \text{и} \quad \omega'_\alpha = \omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_\alpha \gg k_z v_{T\alpha}$$

(где $\alpha = e, i$). Имеем

$$k_\perp^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_e)^2} \right) + \\ + \frac{\omega_{Ni}^2 k_y}{\omega_{Bi} (\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}_i)} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\omega_{Ne}^2 k_y}{\omega_{Be} (\omega - \mathbf{u}_e \mathbf{k})} \frac{\partial \ln N}{\partial x} = 0. \quad (13.31)$$

Отсюда при условии $\omega \gg \mathbf{u}_e \mathbf{k}, \mathbf{u}_i \mathbf{k}$ находим следующий локальный спектр колебаний анизотропной плазмы:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Ni}^2 \frac{\mathbf{u}_i \mathbf{k} k_y}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + k_z^2 \omega_{Ne}^2}{k^2 (1 + c^2/v_A^2)}, \quad (13.32)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ — скорость относительного дрейфа электронов и ионов.

В случае неоднородной плазмы без продольного тока, но при наличии кривизны силовых линий удерживающего магнитного поля скорость \mathbf{u} параллельна оси Oy и равна

$$\mathbf{u} = - \frac{g_{\Phi\Phi}}{\omega_{Bi}},$$

где $g_{\Phi\Phi} \approx (v_{Ti}^2 + v_s^2)/R$. Формула (13.32) при этом записывается в виде

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 \omega_{Ne}^2 + \frac{c^2}{v_A^2} k_y^2 g_{\Phi\Phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{k^2 (1 + c^2/v_A^2)}. \quad (13.33)$$

Отсюда видно, что в условиях, когда магнитное поле обладает положительной кривизной силовых линий (это означает, что внешняя нормаль к силовым линиям направлена в сторону уменьшения плотности, т. е. $g_{\phi\phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} < 0$), колебания с $k_z/k_y < \frac{m}{M} \frac{1}{\omega_{Bi}^2} \left| g_{\phi\phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right|$ (т. е. $k_z \approx 0$) являются аperiodически неустойчивыми, причем инкремент их нарастания порядка $\text{Im } \omega = \gamma \sim \sqrt{\left| g_{\phi\phi} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right|} \approx \sqrt{\frac{(v_s^2 + v_{Ti}^2)}{RL_0}}$, где L_0 — характерный размер неоднородности плотности плазмы. Такая неустойчивость плазмы в системах с положительной кривизной магнитных силовых линий (в литературе такие системы часто называют пробкотронами) впервые была предсказана в работе [71] (см. также обзор Б. Б. Кадомцева в сборнике [7]) и получила название желобковой (конвективной) неустойчивости. Именно желобковая неустойчивость определяет время жизни плазмы в термоядерных установках типа пробкотрона. Время ее развития при $R \approx 10^2$ см, $L_0 \approx 3-10$ см и $T_e \sim T_i \approx 10^6-10^7$ °К оказывается очень малой, порядка $10^{-4}-10^{-5}$ сек. Наблюдаемый в экспериментальных установках с положительной кривизной силовых линий удерживающего магнитного поля выброс плазмы поперек поля (в виде вытянутых вдоль силовых линий языков плазмы), по-видимому, объясняется развитием желобковой неустойчивости [72].

В случае, когда в неоднородной плазме имеется продольный ток (силовые линии магнитного поля для простоты считаем неискривленными), вектор скорости u параллелен оси Oz . Формула (13.32) в этом случае принимает вид

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 \omega_{Ne}^2 + k_y k_z u \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{k^2 (1 + v_A^2/c^2)}. \quad (13.34)$$

Из этого выражения следует, что при условии

$$\left| \frac{k_z}{k_y} \right| < \frac{u}{\omega_{Be}} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \sim \frac{u}{\omega_{Be}} \frac{1}{L_0}$$

Спектры кинетических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$; $k_z v_{Te} \gg \omega$, v_e ; v_i , $k_z v_{Ti} \ll \omega$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов	Роль эффекта Черенкова
$\omega_1 \approx -\frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$ $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1^2}{ k_z v_{Te}} \left[\frac{T_e}{T_i} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right] - \\ - \frac{7}{10} v_{ii} k_{\perp}^4 \rho_i^4 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right);$	$\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \ll \frac{\omega_1^2}{\omega_{Bi}^2} \ll 1$	Несущественна	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > \frac{28}{3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 2 \frac{T_e}{T_i} \times \\ \times k_{\perp}^2 \rho_i^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right)$
$\omega_2 = \frac{k_z^2 \omega_{Bi}}{k_y} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$ $\gamma_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_2^2}{ k_z v_{Te}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) - \\ - \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2};$	$\omega_2 \ll k_z v_s,$ $T_e \gg T_i$	Несущественна	Всегда стабилизирует	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$
$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}$	$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна	Несущественна
$\omega_4^2 = -k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}$	$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна	Несущественна

Спектры кинетических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$; $k_z v_{Te} \gg \omega$, v_e ; v_i , $k_z v_{Ti} \ll \omega$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов	Роль эффекта Черенкова
$\omega_1 \approx -\frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$ $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1^2}{ k_z v_{Te}} \left[\frac{T_e}{T_i} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right] - \\ - \frac{7}{10} v_{ii} k_{\perp}^4 \rho_i^4 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right);$	$\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \ll \frac{\omega_1^2}{\omega_{Bi}^2} \ll 1$	Несущественна	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > \frac{28}{3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 2 \frac{T_e}{T_i} \times \\ \times k_{\perp}^2 \rho_i^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right)$
$\omega_2 = \frac{k_z^2 \omega_{Bi}}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}},$ $\gamma_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_2^2}{ k_z v_{Te}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) - \\ - \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2};$	$\omega_2 \ll k_z v_s,$ $T_e \gg T_i$	Несущественна	Всегда стабилизирует	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$
$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}$	$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна	Несущественна
$\omega_4^2 = -k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}$	$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна	Несущественна

Спектры кинетических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1, \omega \gg \nu_{\alpha}, k_z \nu T_{\alpha}$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов
$\omega_1 \approx \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x},$ $\gamma_1 = \frac{7}{10} \nu_{ii} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i} \left[\frac{v_A^2}{c^2} - \frac{31}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right];$	$\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} < \frac{m}{M} \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_1^2}{\omega_{Bi}^2}$	Несущественна	Дестабилизирует при $-1 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} <$ $< \frac{28}{31} \frac{v_A^2}{c^2}$
$\omega_2 = - \frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_e}{\partial x},$ $\gamma_2 = \nu_{\alpha\phi} \frac{\partial \ln T_e^{3/2}}{\partial \ln NT_e};$	$\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \gtrsim \frac{m}{M} \frac{\rho_i^2}{L_0^2}$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e^{3/2}}{\partial \ln NT_e} > 0$	Несущественна
$\omega_3^2 = - \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{T_e}{T_i} \frac{M}{m} \omega_{Bi}^2 \frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}$	$\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} < \frac{m}{M} \frac{T_i}{T_e}$	Несущественна	Несущественна

Спектры кинетических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1; v_e \gg \omega, k_z v_{Te}; \omega v_e \gg k_z^2 v_{Te}^2; \omega \gg v_i, k_z v_{Ti}$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов
$\omega_1 = \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}$ $\gamma_1 = \frac{7}{10} v_{ii} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i} \left(\frac{v_A^2}{c^2} - \frac{31}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right);$	$\omega_{др} \gg \omega_s$	Несущественна	Дестабилизирует при $-1 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < \frac{28}{31} \frac{v_A^2}{c^2}$
$\omega_2 = - \frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x},$ $\gamma_2 = \frac{\omega_2^2}{1,96 \omega_s} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e^{1,71}} \right);$	$\omega_{др} \ll \omega_s$	Всегда дестабилизирует	Несущественна
$\omega_3 = i 1,96 \omega_s \frac{T_e}{T_i} \frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial \ln NT_i}$	$\omega_{др} \gg \omega_s$	Всегда дестабилизирует	Несущественна

Спектры кинетических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$; $v_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$; $\omega v_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$; $\omega \gg v_i$, $k_z v_{Ti}$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов
$\omega_1 \approx -\frac{k_y v_s^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$ $\gamma_1 \approx 1,44 \frac{\omega_1^2 v_{\text{эфф}}}{k_z^2 v_{Te}^2} \left[\frac{T_e}{T_i} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right) - \right.$ $\left. - 0,56 \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right] - \frac{7}{10} v_{ii} k_{\perp}^4 \rho_i^4 \times$ $\times \left(1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right)$	$\frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} < \frac{\omega_1^2}{\omega_{Bi}^2} \ll 1$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 1,8 \frac{T_e}{T_i} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \times$ $\times \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N} \right);$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} >$ $> \frac{28}{3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$

Спектры кинетических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$; $v_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$; $\omega v_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$; $\omega \gg v_i$; $k_z v_{Ti}$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов
$\omega_2 = \frac{k_z^2 \omega_{Bi}}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}},$ $\gamma_2 = -1,44 \frac{\omega_2^2 v_{\Phi\Phi}}{k_z^2 v_{Te}^2} \left(1 - 0,56 \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} \right) -$ $- \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2};$	$\omega_2 \ll k_z v_s$ $T_e \gg T_i$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 1,8$	Всегда стабилизирует
$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}$	$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна
$\omega_4^3 = -k_z^2 v_s^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}$	$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна

Спектры гидродинамических колебаний $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1; \nu_{\alpha} \gg k_z v_{T\alpha}, \omega$	Условия существования	Роль эффекта столкновений электронов	Роль столкновений ионов
$\omega_1 = -\frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial}{\partial x} \ln NT^{1,71},$ $\gamma_1 = -1,14 \frac{k_z^2 \kappa_{\parallel}^e}{N} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln NT^{1,71}};$	$\omega \nu_{\text{эфф}} \gg k_z^2 v_{Te}^2$ $\omega \gg \frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}}, k_z v_{Ti}$	Дестабилизирует при $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln NT^{1,71}} < 0$	Несущественна
$\omega_2^2 = -0,95 k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{\partial \ln NT^{-3/2}}{\partial \ln NT^{1,71}};$	$k_z^2 v_{Te}^2 \ll \omega \nu_{\text{эфф}}$ $\omega \ll \frac{m}{M} \nu_{\text{эфф}}, \omega_{\text{др}}$	Несущественна	Несущественна
$\omega_3^2 = k_z^2 v_{Ti}^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} \right);$	$\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\nu_{\text{эфф}}} \gg \omega \gg \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\nu_{ii}}$	Несущественна	Несущественна
$\omega_4^3 = -k_z^2 v_{Ti}^2 \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega_{Bi}} \frac{\partial \ln T}{\partial x}$	$\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\nu_{\text{эфф}}} \gg \omega \gg \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\nu_{ii}}$ $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln N} \gg 1$	Несущественна	Несущественна

колебания неоднородной плазмы с током являются неустойчивыми, причем инкремент их нарастания порядка

$$\text{Im } \omega = \gamma \sim \sqrt{\left| \frac{k_z}{k_y} \frac{u}{L_0} \omega_{Bi} \right|}.$$

Такая неустойчивость для бесстолкновительной плазмы была исследована в работе [73] и получила название токово-конвективной неустойчивости. Токовоконвективная неустойчивость является весьма опасной для термоядерных установок при удержании и нагреве плазмы продольным током*) (такие установки получили название «Токамаков» [72]), поскольку время развития ее в высокотемпературной плазме может быть даже меньше, чем время развития желобковой неустойчивости.

Не следует думать, что рассмотренные неустойчивости существуют лишь в бесстолкновительной плазме. Они возможны также и в плазме со столкновениями. Более того, в работе [71] желобковая неустойчивость как раз и была обнаружена для плотной плазмы с большим числом столкновений в условиях, когда для описания колебаний справедливо приближение одножидкостной гидродинамики (см. § 3).

Токовоконвективная неустойчивость также впервые была исследована для плазмы со столкновениями в работе [74].

Как уже подчеркивалось выше, рассмотренные здесь желобковая и токовоконвективная неустойчивости неоднородной анизотропной плазмы играют фундаментальную роль для физики горячей плазмы. Именно они и определяют время жизни плазмы во многих термоядерных установках.

Не исключена возможность, что эти неустойчивости присущи также и ионосферной плазме.

В последние годы в литературе появляется большое число работ, посвященных теоретическому истолкованию различного рода низкочастотных колебаний, наблюдаемых в ионосфере (см. обзорные работы [75, 76] и цитированную в них литературу). Такие колебания связываются с альвеновскими, магнитозвуковыми и спиральными волнами в плазме. Широко обсуждается также возможность их

*) Недавние исследования показали [62], что токовоконвективная неустойчивость в ряде случаев определяет максимально достижимый ток в электронных пучках с компенсированным зарядом.

связи с дрейфовыми волнами [76]. Низкочастотные колебания магнитоактивной плазмы стали инструментом для исследования структуры ионосферы. Подробное рассмотрение всех этих вопросов, выходит, однако, за рамки настоящей монографии.

§ 14. ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

В предыдущих параграфах речь шла о коротковолновых электромагнитных колебаниях пространственно неоднородной плазмы, для анализа которых применимо приближение геометрической оптики, а поэтому плазму можно считать практически неограниченной. Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда размеры неоднородности плазмы малы по сравнению с длиной волны исследуемых колебаний или когда в плазме имеются достаточно резкие поверхности разрыва. Из всех возможных задач электродинамики плазмы с такими резкими неоднородностями мы здесь рассмотрим лишь наиболее простую, а именно исследуем поверхностные электромагнитные волны в полуограниченной плазме, граничащей с вакуумом.

Дело в том, что в пространственно ограниченной плазме наряду с коротковолновыми (по сравнению с характерными размерами плазмы) объемными колебаниями, спектр которых имеет такой же характер, как и в случае неограниченной плазмы, существует качественно новый тип электромагнитных колебаний — волны, бегущие вдоль поверхности плазмы и затухающие в направлении, перпендикулярном ей.

Такие волны, называемые поверхностными, мы и будем изучать ниже для случая полубесконечной в пространстве плазмы.

Совершенно очевидно, что характер поверхностных волн существенным образом зависит от того, что собой представляет поверхность плазмы и как выглядят граничные условия, которыми должны быть дополнены уравнения поля и о которых уже говорилось в § 2. Из большого многообразия возможных моделей поверхностей мы ограничимся здесь рассмотрением только двух противоположных по своему характеру. Первая из этих моделей предполагает наличие у плазмы очень резкой свободной

поверхности, так что все величины размерности длины в плазме (длина волны колебаний, дебаевские и ларморовские радиусы частиц, длины их свободного пробега и т. д.) значительно больше характерного размера области изменения плотности у поверхности плазмы. Такая ситуация осуществляется, например, когда плазма удерживается в стеклянном сосуде, электромагнитные свойства которого в данном случае несущественно отличаются от свойств вакуума; она характерна для лабораторной плазмы газового разряда. Вторая же модель предполагает, что плазма удерживается внешним магнитным полем, а поверхность ее является достаточно размытой с характерным размером, превышающим ларморовские радиусы частиц, но малым по сравнению с длиной волны исследуемых поверхностных колебаний. Такую поверхность имеет высокотемпературная плазма, удерживаемая сильным магнитным полем в лабораторных установках управляемого термоядерного синтеза.

а) Поверхностные волны в полубесконечной плазме с резкой границей. Анализ поверхностных волн в плазме с резкой границей начнем со случая изотропной полубесконечной плазмы в отсутствие внешних электрического и магнитного полей, причем в качестве невозмущенной функции распределения частиц сорта α ($\alpha = e, i$) выберем распределение Максвелла

$$f_{0\alpha} = \frac{N_{0\alpha}}{(2\pi m_{\alpha} T_{\alpha})^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_{\alpha} v^2}{2T_{\alpha}}\right), \quad (14.1)$$

где $N_{0\alpha} = \text{const}$ при $x \leq 0$ и $N_{0\alpha} = 0$ при $x > 0$. При этом решение кинетического уравнения для возмущения функции распределения *)

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f_{\alpha} + (\mathbf{v} \nabla) \delta f_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} f_{0\alpha} = 0 \quad (14.2)$$

без ограничения общности можно искать в виде $\delta f_{\alpha} \sim \sim \delta f_{\alpha}(x) e^{-i\omega t + ik_z z}$, направив ось Oz вдоль составляющей волнового вектора, параллельного поверхности плазмы.

*) Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением бесстолкновительной плазмы. Поверхностные волны в полугораниченной плазме с учетом столкновений частиц исследованы в работах [77, 78] (см. также [60, 79]).

Уравнение (14.2) должно быть дополнено граничным условием при $x = 0$, т. е. на поверхности плазмы. Именно это условие должно содержать всю информацию о характере взаимодействия частиц с поверхностью плазмы. Ниже мы будем считать, что заряженные частицы падая на поверхность, испытывают зеркальное отражение от нее *). Тогда при $x = 0$ должно выполняться условие

$$\delta f_{\alpha}(v_x > 0) = \delta f_{\alpha}(v_x < 0). \quad (14.3)$$

Далее, вместо функции $\delta f_{\alpha}(v_x)$ удобно ввести две функции (индекс α для простоты записи опускаем)

$$\psi^{\pm}(v_x) = \delta f(v_x > 0) \pm \delta f(v_x < 0), \quad (14.4)$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^+}{\partial x} - i \frac{\omega - k_z v_z}{v_x} \psi^- - \frac{2e}{T} E_x f_0 &= 0, \\ \frac{\partial \psi^-}{\partial x} - i \frac{\omega - k_z v_z}{v_x} \psi^+ - \frac{2e}{T} \frac{v_z}{v_x} E_z f_0 &= 0 \end{aligned} \quad (14.5)$$

с однородным граничным условием при $x = 0$

$$\psi^-|_{x=0} = 0. \quad (14.6)$$

Сформулированную задачу удобно решать методом преобразования Фурье, продолжая функции $\psi^+(x)$ и $E_z(x)$ в область $x > 0$ четным образом, а функции $\psi^-(x)$ и $E_x(x)$ — нечетным образом и представляя их в виде

$$\begin{aligned} E_x(x) &= \int_0^{\infty} dk_x E_x(k_x) \sin k_x x, \\ \psi^-(x) &= \int_0^{\infty} dk_x \psi^-(k_x) \sin k_x x, \\ E_z(x) &= \int_0^{\infty} dk_x E_z(k_x) \cos k_x x, \\ \psi^+(x) &= \int_0^{\infty} dk_x \psi^+(k_x) \cos k_x x. \end{aligned} \quad (14.7)$$

В результате граничное условие (14.6) удовлетворяется автоматически, а уравнения (14.5) сводятся к

*) Анализ поверхностных волн при других типах граничных условий можно найти в [77, 78].

алгебраическим

$$\begin{aligned} k_x v_x \psi^+(k_x) + i(\omega - k_z v_z) \psi^-(k_x) &= -\frac{2e}{T} E_x v_x f_0, \\ k_x v_x \psi^-(k_x) - i(\omega - k_z v_z) \psi^+(k_x) &= \frac{2e}{T} E_z v_z f_0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Решая эту систему уравнений и определяя затем из (14.4) $\delta f(v_x)$ с помощью соотношения (3.17), находим плотность тока, индуцированного в полуограниченной плазме

$$j_i(\mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\mathbf{k}), \quad (14.9)$$

где $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор проводимости изотропной неограниченной плазмы, определенный выражением (5.5).

Нет ничего удивительного в том, что материальное уравнение (14.9) для полубесконечной плазмы имеет такой же вид, как в случае неограниченной, поскольку в рассматриваемой нами модели зеркального отражения частиц от поверхности характер отклика системы на действие поля как для неограниченной плазмы, так и полубесконечной совершенно одинаков. Следует отметить, что это утверждение должно быть справедливо и для анизотропной плазмы, и в частности, при наличии внешнего магнитного поля (подробнее см. [78]).

Таким образом, материальное уравнение (14.9) для полубесконечной плазмы с зеркальным отражением частиц от ее поверхности имеет такой же вид, как и в случае неограниченной плазмы как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля. При этом, однако, индуцированный ток отличен от нуля только внутри самой плазмы, т. е. при $x \leq 0$; в вакууме (при $x > 0$) индуцированный ток отсутствует вследствие обращения в нуль плотности заряженных частиц.

Возвращаясь к изотропной плазме, запишем уравнения Максвелла для компонент полей E_x , E_z и B_y *):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} - ik_z E_x + i \frac{\omega}{c} B_y &= 0, \\ ik_z B_y - i \frac{\omega}{c} E_x + \frac{4\pi}{c} j_x &= 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} + i \frac{\omega}{c} E_z - \frac{4\pi}{c} j_z &= 0. \end{aligned} \quad (14.10)$$

*) Следует отметить, что в выбранной нами системе координат, когда ось Oz направлена вдоль волнового вектора, параллельного поверхности плазмы (т. е. $k_y = 0$), уравнения поля расщепляются, на две системы уравнений для E_x, E_z, B_y и E_y, B_x, B_z соответственно, причем последняя не допускает решений в виде поверхностных волн.

Эти уравнения пригодны как в плазме ($x \leq 0$), так и в вакууме ($x > 0$), если учесть, что в вакууме $j = 0$. Подставляя разложения (14.7) в (14.10), находим

$$E_z(k_x) = -i \frac{2}{\pi} \frac{c}{\omega} B_y(x \rightarrow -0) \frac{1}{k^2} \left[\frac{k_z^2}{\varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k_x^2 \omega^2 / c^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right], \quad (14.11)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, а $\varepsilon^l(\omega, k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости неограниченной изотропной плазмы, определенные выражениями (5.9).

Из (14.11) и (14.7) в свою очередь получаем так называемый поверхностный импеданс полубесконечной плазмы

$$Z_{\text{пл}} = \frac{E_z(x \rightarrow -0)}{iB_y(x \rightarrow -0)} = -\frac{2\omega}{\pi c} \int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2} \left[\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right]. \quad (14.12)$$

Совершенно аналогичным образом находится импеданс при $x \rightarrow +0$ (т. е. со стороны вакуума):

$$Z_{\text{вак}} = \frac{E_z(x \rightarrow +0)}{iB_y(x \rightarrow +0)} = \left(\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (14.13)$$

Из условий непрерывности полей E_z и B_y на границе плазмы, которые следуют непосредственно из системы уравнений (14.10) при их интегрировании по физически бесконечно малому переходному слою плазма — вакуум (так как в рассматриваемом случае отсутствует поверхностный ток), окончательно находим искомое дисперсионное уравнение для поверхностных колебаний полуограниченной изотропной плазмы с резкой границей

$$\sqrt{\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1} = -\frac{2\omega}{\pi c} \int_0^\infty \frac{dk_x}{k^2} \left[\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega, k)} \right]. \quad (14.14)$$

Переходя к пределу $c \rightarrow \infty$, получаем дисперсионное уравнение для продольных (потенциальных) поверхностных волн

$$1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|k_z| dk_x}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)} = 0. \quad (14.15)$$

Анализ уравнений (14.14) и (14.15) начнем со случая холодной плазмы, полностью пренебрегая тепловым движением частиц. Учитывая, что при этом

$$\varepsilon^l = \varepsilon^{tr} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2},$$

из уравнения (14.14) получаем *)

$$\sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Ne}^2 - \omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0. \quad (14.16)$$

Отсюда видно, что поверхностные волны в полубесконечной

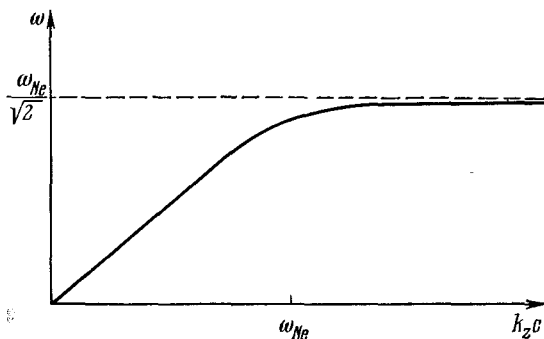


Рис. 15. Спектр поверхностных колебаний холодной плазмы.

холодной плазме существуют лишь в области частот $\omega < \omega_{Ne}$, причем их фазовая скорость всегда меньше скорости света $\omega < k_z c$. Общее решение уравнения (14.16) представлено графически на рис. 15. Аналитическое решение легко записать в предельных случаях длинных и

*) Заметим, что уравнение (14.16) можно также получить исходя из дисперсионного уравнения для поверхностных волн в средах без пространственной дисперсии (см., например, [8, 9]).

коротких волн

$$\omega^2 = \begin{cases} k_z^2 c^2 & \text{при } k_z^2 c^2 \ll \omega_{Ne}^2, \\ \frac{\omega_{Ne}^2}{2} & \text{при } k_z^2 c^2 \gg \omega_{Ne}^2. \end{cases} \quad (14.17)$$

В первом из этих случаев фазовая скорость поверхностных волн близка к скорости света и колебания почти поперечны (в сильной степени непотенциальны), в то время как во втором случае они почти продольны (потенциальны) и их фазовая скорость мала по сравнению со скоростью света. Потенциальность коротковолновых (а следовательно, медленных) поверхностных волн в холодной плазме следует непосредственно из уравнения (14.15), которое в случае холодной плазмы принимает вид *)

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} = -1 \quad (14.18)$$

и имеет решение, тождественно совпадающее со вторым решением (14.17).

Выше мы полностью пренебрегали тепловым движением частиц, а вместе с тем и бесстолкновительным черенковским затуханием поверхностных волн. Очевидно, что наиболее сильно затухают медленные волны, являющиеся с хорошей степенью точности продольными. Поэтому для определения затухания поверхностных волн мы ограничимся анализом уравнения (14.15). Используя явное выражение для $\varepsilon^l(\omega, k)$ (см. § 5), для волн с фазовой скоростью больше тепловой скорости электронов, т. е. $\omega \gg k_z v_{Te}$, получаем

$$2 - \frac{\omega_{Ne}^2}{\omega^2} + i\alpha \frac{|k_z| v_{Te}}{\omega} = 0, \quad (14.19)$$

где $\alpha \approx 0,41$. Отсюда для декремента затухания продольных поверхностных волн находим выражение:

$$\gamma = -\frac{\alpha}{4} |k_z| v_{Te}. \quad (14.20)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что затухание поверхностных волн, в отличие от объемных, не экспоненциально мало, хотя их фазовая скорость намного больше тепловой скорости электронов. Это является следствием того, что при $\omega \gg k_z v_{Te}$ резонансное взаимодействие частиц с волной имеет место при $\omega = k_x v_x$, а по-

*) Уравнение (14.18) получается также в рамках обычной феноменологической электродинамики сред без пространственной дисперсии (подробнее см. [8, 9]).

сколькx для поверхностных волн согласно (14.15) k_x принимает сколь угодно большие значения (поэтому, в частности, и $\frac{\omega}{k_x} < v_{Te}$), в поглощении поверхностных волн принимает участие основная масса электронов, а не только экспоненциально малая доля частиц, как это имело место в случае объемных ленгмюровских волн (см. § 6).

Рассмотрим теперь поверхностные волны в полубесконечной плазме в области малых фазовых скоростей, меньших тепловой скорости электронов, но больших тепловой скорости ионов, т. е. при $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}$.

Как это было показано в § 6, в этой области фазовых скоростей в бесстолкновительной плазме возможны слабозатухающие объемные колебания, так называемые ионно-звуковые волны, если только плазма является сильно неизотермической и $T_e \gg T_i$. Это требование сохраняется и для поверхностных волн в рассматриваемой области фазовых скоростей, которые по аналогии с объемными колебаниями получили названия поверхностных ионно-звуковых волн. Так же как и объемные, поверхностные ионно-звуковые волны с большой степенью точности являются продольными и описываются дисперсионным уравнением (14.15). Подставляя в него выражение для продольной диэлектрической проницаемости $\epsilon^l(\omega, k)$ в ионно-звуковой области частот (см. § 6) и полностью пренебрегая тепловым движением ионов, получим следующее дисперсионное уравнение для поверхностных ионно-звуковых волн *):

$$1 - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Ni}^2}{2k_z^2 v_s^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) + \sqrt{1 + \frac{\omega_{Ni}^4}{4k_z^4 v_s^4} \left(1 + 2i \frac{\omega}{k_0 v_{Te}} \right)} = 0, \quad (14.21)$$

где $k_0^2 = -\omega_{Ni}^2/v_s^2 \left(1 - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \right)$.

Видно, что поверхностные ионно-звуковые волны существуют лишь при $\omega^2 < \omega_{Ni}^2$, причем, учитывая малость мнимых слагаемых, из уравнения (14.21) находим их

*) Подробное изложение теории поверхностных ионно-звуковых колебаний полубесконечной плазмы с учетом теплового движения и столкновений частиц можно найти в обзорной статье [60].

спектр $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$:

$$\omega^2 = \omega_{Ni}^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_{Ni}^2}{2k_z^2 v_s^2} + \sqrt{1 + \frac{\omega_{Ni}^4}{4k_z^4 v_s^4}} \right\}^{-1}, \quad (14.22)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{\omega_{Ni}^2 k_0 v_{Te}} \left[\frac{\omega_{Ni}^4 / 4k_z^4 v_s^4}{\sqrt{1 + \omega_{Ni}^4 / 4k_z^4 v_s^4}} + \frac{\omega_{Ni}^2}{2k_z^2 v_s^2} \right].$$

Особенно простой вид формулы (14.22) принимают

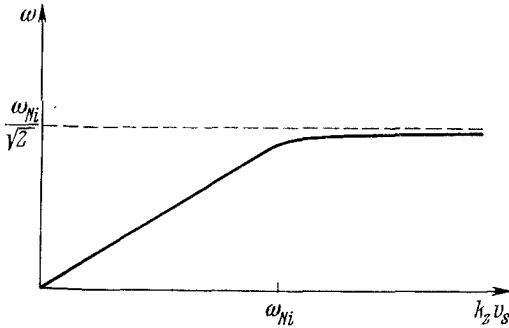


Рис. 16. Спектр поверхностных ионно-звуковых волн в неизотермической плазме.

в предельных случаях длинных $k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Ni}^2$ и коротких $k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Ni}^2$ поверхностных волн

$$\omega^2 = \begin{cases} k_z^2 v_s^2 & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Ni}^2, \\ \frac{\omega_{Ni}^2}{2} & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Ni}^2; \end{cases} \quad (14.23)$$

$$\frac{\gamma}{|\omega|} = \begin{cases} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} \left| \frac{e_i}{e} \right| & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Ni}^2, \\ - \frac{\omega_{Ni}^2}{16k_z^2 v_s^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} \left| \frac{e_i}{e} \right| & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Ni}^2, \end{cases}$$

Зависимость частоты ω от $k_z v_s$ для поверхностных ионно-звуковых волн в полубесконечной неизотермической плазме представлена на рис. 16.

Логически теперь следовало бы рассмотреть поверхностные волны в замагниченной полубесконечной плазме

с резкой границей, с характерным размером неоднородности границы (меньшим, чем ларморовские радиусы электронов и ионов). При условии зеркального отражения заряженных частиц от поверхности (условие (14.3)) получение общего дисперсионного уравнения поверхностных колебаний замагниченной плазмы подобно проведенному выше для плазмы в отсутствие магнитного поля. Однако вывод этого довольно громоздкого уравнения и его анализ мы здесь приводить не будем (интересующегося читателя отошлем к работам [78]), поскольку в газовой плазме при наличии внешнего магнитного поля размер неоднородности границы плазмы реально всегда больше ларморовских радиусов частиц, а газокинетическое давление пренебрежимо мало по сравнению с давлением магнитного поля (см. таблицы I—IV). Поэтому ниже мы рассматриваем именно такой с практической точки зрения важный случай, тесно связанный с проблемой устойчивости магнитного удержания плазмы.

б) Неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем. Рассмотрим полубесконечную плазму, удерживаемую достаточно сильным магнитным полем, параллельным ее поверхности и направленным вдоль оси Oz . Поверхность плазмы предполагается достаточно плавной с характерным размером неоднородности, много большей ларморовских радиусов частиц и расположенной около плоскости $x = 0$. Столкновениями частиц в плазме, для простоты, пренебрежем, предполагая выполненными неравенства $\omega_{\alpha} \gg \nu_{\alpha}$, где $\nu = e, i$. Невозмущенная функция распределения частиц при этом находится так же, как это было сделано в § 11, и определяется выражениями (11.14) и (11.15). Отличие состоит лишь в том, что отклонение этого распределения от максвелловского существенно только вблизи поверхности плазмы — в области ее неоднородности. В этой же области локализованы диамагнитные токи, обусловленные ларморовским вращением частиц. Как было показано в § 13, диамагнитные токи могут стать причиной возбуждения в области неоднородности плазмы коротковолновых дрейфовых колебаний с длиной волны меньше характерного размера неоднородности плазмы, а поэтому локализованных в узком слое вблизи ее поверхности.

С другой стороны, для поверхностных волн с характерным размером области изменения поля в плазме, значительно превосходящим размер неоднородности поверх-

ности, а следовательно, и ларморовские радиусы вращения частиц, указанные диамагнитные токи должны фигурировать в граничных условиях. Представляет интерес выяснить, как влияют эти диамагнитные токи на спектр поверхностных волн в плазме, а в наших условиях даже приводят к раскачке поверхностных волн. Поставленный вопрос мы рассмотрим на примере продольных (потенциальных) волн, поскольку в случае магнитного удержания плазмы, когда давление магнитного поля намного превосходит газокинетическое давление частиц, электромагнитные колебания плазмы с хорошей степенью точности являются потенциальными. По этой же причине, как уже обосновывалось выше в § 11, пренебрегаем неоднородностью магнитного поля по сравнению с неоднородностью плотности и температуры плазмы.

Тогда решение уравнения (11.20) для возмущения функции распределения частиц сорта α запишется в виде (ср. с (11.22))

$$\delta f_{\alpha}(x) = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{B\alpha}} \int_0^{\varphi} d\varphi' \nabla\Phi(x') \frac{\partial f_{0\alpha}(x')}{\partial v} \times \\ \times \exp\left\{ \frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - k_{\perp}v_{\perp} \sin\varphi'' - k_z v_z) \right\}, \quad (14.24)$$

где x' , x , φ' и φ связаны между собой уравнением характеристики (11.21). Подставляя решение (14.24) в выражение (3.17) для возмущенной плотности и проведя несложные, но довольно громоздкие вычисления (подобные проведенным в § 7), окончательно получаем следующее уравнение для потенциала поля колебаний (подробнее см. [80]):

$$\Delta\Phi = \sum_{\alpha} \int dk_x \Phi(k_x) e^{ik_x x} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \times \\ \times \left\{ 1 - \sum_s \frac{\omega}{\omega - s\omega_{B\alpha}} \left[1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \frac{\partial^0}{\partial x} \left(1 - \frac{s}{Z_{\alpha}} \frac{\omega}{\omega_{B\alpha}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{k_x v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} \frac{\partial^0}{\partial x} \frac{A'_s(Z_{\alpha})}{A_s(Z_{\alpha})} \right] A_s(Z_{\alpha}) J_+ \left(\frac{\omega - s\omega_{B\alpha}}{|k_z| v_{T\alpha}} \right) \right\}, \quad (14.25)$$

где

$$Z_{\alpha} = k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 / \omega_{B\alpha}^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

а оператор

$$\frac{\partial^0}{\partial x} = \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_\alpha}$$

действует на все стоящие справа от него величины.

Следует отметить, что уравнение (14.25) пригодно во всем пространстве как в плазме (в области $x < 0$), так и в вакууме (в области $x > 0$). Поэтому оно не требует задания специальных граничных условий, их можно получить путем интегрирования самого уравнения (14.25) по физически бесконечно малому переходному слою (малому по сравнению с размером области изменения поля в плазме, если речь идет о поверхностных волнах) вблизи поверхности плазмы.

Проанализируем теперь уравнение (14.25) применительно к поверхностным волнам в замагниченной плазме в условиях, когда ларморовские радиусы частиц малы по сравнению с размером неоднородности плазмы, а последний в свою очередь мал по сравнению с длиной волны (точнее, с характерным размером области изменения поля в плазме). Анализ начнем со случая холодной плазмы, когда диамагнитными токами в поверхностном слое полностью можно пренебречь. Уравнение (14.25) при этом приобретает вид *)

$$\begin{aligned} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2\right) \Phi - \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2}\right) k_z^2 \Phi + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}\right) + \\ + k_y \Phi \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{B\alpha} \omega_{N\alpha}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)} = 0. \quad (14.26) \end{aligned}$$

В объеме плазмы (при $x < 0$) вдали от ее поверхности отсюда имеем

$$\begin{aligned} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2\right) \Phi_1 - \\ - \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2}\right) k_z^2 \Phi_1 = 0. \quad (14.27) \end{aligned}$$

*) Заметим, что уравнение (14.26) можно получить исходя из гидродинамических уравнений для холодной плазмы (3.22).

В вакууме же (при $x > 0$) уравнение (14.26) сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_2 = 0. \quad (14.28)$$

Наконец, граничные условия, связывающие $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ на поверхности раздела плазма — вакуум, получаемые путем интегрирования уравнения (14.26), записываются в виде

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0, \quad (14.29)$$

$$\left\{ \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2} \right) \frac{\partial\Phi}{\partial x} + k_y\Phi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{B\alpha}\omega_{N\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)} \right\}_{x=0} = 0,$$

где символ $\{ \ }_{x=0}$ означает скачок на поверхности $x = 0$, т. е.

$$\{A\}_{x=0} = A(x \rightarrow +0) - A(x \rightarrow -0). \quad (14.30)$$

Теперь, когда получены граничные условия, мы можем решить уравнения (14.27) и (14.28) ишить их с помощью соотношений (14.29). В результате получим систему однородных алгебраических уравнений для постоянных интегрирования, условие разрешимости которой и представляет собой искомое дисперсионное уравнение для продольных поверхностных волн в замагниченной полуграниченной плазме:

$$\varepsilon_{\perp} \sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} + k_y g = -\sqrt{k_y^2 + k_z^2}. \quad (14.31)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega^2}, \\ g &= \sum_{\alpha} \frac{\omega_{B\alpha}\omega_{N\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}. \end{aligned} \quad (14.32)$$

В отсутствие магнитного поля, когда

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon \text{ и } g = 0,$$

уравнение (14.31) переходит в (14.18) и описывает высокочастотные поверхностные волны в незамагниченной

плазме. Магнитное поле, параллельное поверхности плазмы и направленное по оси Oz , существенно меняет спектр поверхностных волн при $\omega_{Be} \gtrsim \omega$. Так, для мод с $k_y = 0$ в чисто электронной плазме поверхностные волны, согласно (14.31), существуют лишь при условии $\omega_{Ne}^2 > \omega_{Be}^2$ и в области частот $\omega_{Ne}^2 > \omega^2 \gg \omega_{Be}^2$. Спектр частот поверхностных волн при этом определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\omega_{Ne}^2 + \omega_{Be}^2). \quad (14.33)$$

При $k_y \neq 0$ оказывается возможным существование поверхностных волн и в области частот $\omega < \omega_{Be}$. Так, например, для мод с $k_z \rightarrow 0$ в случае электронной плазмы из уравнения (14.31) находим

$$\omega = \frac{k_y}{2|k_y|} \omega_{Be} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega_{Be}^2 + 2\dot{\omega}_{Ne}^2}. \quad (14.34)$$

Не представляет большого труда проанализировать уравнение (14.31) и в области низких частот, когда существенным становится учет движения ионов. Мы, однако, этого делать здесь не будем, но отметим, что в области самых низких частот, $\omega \ll \omega_{Bi}$, величина $g \rightarrow 0$, а $\varepsilon_{\perp} > 0$, в результате уравнение (14.31) решений не имеет, т. е. поверхностные волны в холодной полубесконечной плазме в области частот $\omega \ll \omega_{Bi}$ не существуют.

Мы убедились таким образом, что в холодной замагниченной плазме при полном пренебрежении тепловым движением частиц поверхностные колебания всегда устойчивы. Этого и следовало ожидать, поскольку в таком приближении пренебрегается также и диамагнитными токами, текущими в неоднородном поверхностном слое плазмы.

Картина качественно меняется при учете конечного ларморовского радиуса вращения частиц, т. е. отличной от нуля температуры плазмы. При этом в поверхностном слое плазмы появляются диамагнитные токи, которые могут оказаться причиной неустойчивости поверхностных колебаний плазмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение (14.25) для низкочастотных $\omega \ll \omega_{Ba}$ длинноволновых колебаний с длиной волны значительно больше ларморовских радиусов частиц.

Разлагая функции $A_s(Z_{\alpha})$ по степеням Z_{α} и ограничиваясь только слагаемыми с $s = 0$, из интегрального уравнения (14.25) получим дифференциальное уравнение

второго порядка:

$$\Delta\Phi = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) + \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} \frac{\partial^0}{\partial x} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \Phi +$$

$$+ \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left\{ \frac{v_{T\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{1}{\omega_{B\alpha}^2} \frac{\partial^0}{\partial x} v_{T\alpha}^2 J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}. \quad (14.35)$$

При выводе этого уравнения было принято упрощающее допущение, а именно предполагалось, что $\omega^2 k_{\perp}^2 \ll k_z^2 \omega_{Bi}^2$.

Граничные условия на потенциал Φ получаются путем интегрирования уравнения (14.35) по узкому переходному слою вблизи поверхности раздела плазма — вакуум. В результате находим

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \sum_{\alpha} \left[- \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} k_y J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \Phi + \right. \right. \quad (14.36)$$

$$\left. \left. + \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right] \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0.$$

Теперь, когда получено уравнение (14.35) для потенциала поля колебаний, пригодное как в плазме ($x \leq 0$, $\Phi = \Phi_1$), так и в вакууме ($x > 0$, $\Phi = \Phi_2$), и сформулированы граничные условия (14.36), мы можем решать это уравнение отдельно для $x \leq 0$ и $x > 0$ и сшить найденные решения при $x = 0$. Условия разрешимости полученной при этом однородной системы алгебраических уравнений для постоянных интегрирования дает нам искомое дисперсионное уравнение колебаний. Для поверхностных волн полубесконечной плазмы это уравнение имеет вид

$$\left(1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right) \kappa +$$

$$+ \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega \omega_{B\alpha}} k_y J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0, \quad (14.37)$$

где

$$\kappa^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]}{1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{N\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2}}. \quad (14.38)$$

Очевидно, что поверхностные волны существуют лишь в области частот, где $\kappa^2 > 0$.

Мы не будем подробно обсуждать всевозможные решения уравнения (14.37). Читателя, интересующегося поверхностными волнами и проблемой устойчивости границы плазмы, удерживаемой магнитным полем, отошлем к недавно появившейся обзорной статье [81], где уравнение (14.25) обобщается с учетом столкновений частиц в плазме и дан наиболее полный анализ задачи (там же можно найти библиографию по этой проблеме, см. также [6]). Мы же ставили своей целью ознакомление читателя с общим методом исследования поверхностных волн в замагниченной плазме с размытой границей и демонстрацию неустойчивости такой границы. Последнее легко показать, проанализировав уравнение (14.37) в области фазовых скоростей поверхностных волн

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}.$$

Уравнение (14.37) в этой области принимает вид

$$\left(1 + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2} \right) \kappa + \frac{\omega_{Ni}^2 k_y}{\omega \omega_{Bi}} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0, \quad (14.39)$$

причем

$$\kappa^2 = k_y^2 + \frac{k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega^2} \right) + \frac{\omega_{Ni}^2}{v_s^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right)}{1 + \frac{\omega_{Ni}^2}{\omega_{Bi}^2}}, \quad (14.40)$$

где $v_s = \sqrt{\left| \frac{e_i}{e} \right| \frac{T_e}{M}}$ — скорость ионного звука.

Отсюда для мод с $k_y^2 \gg k_z^2$ и при условии $\omega_{Ni}^2 \gg \omega_{Bi}^2$ (которое всегда с большим запасом выполняется как в лабораторной плазме в условиях ее магнитного удержания, так и в ионосферной), находим спектр неустойчивых ионно-звуковых волн

$$\begin{aligned} \omega &= k_y v_s, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Таким образом, в неоднородной плазме, удерживаемой магнитным полем, под действием диамагнитных токов, текущих в узком слое вблизи поверхности плазмы в области ее неоднородности, происходит возбуждение ионно-звуковых волн поверхностного типа, распространяющихся вдоль границы плазмы под большим углом к магнитному полю и убывающих в плазме на глубине порядка v_s/ω_{Bi} . Волны со спектром (14.41) существуют только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$, причем чем больше степень неизотермичности, тем глубже в плазму проникают эти волны.

Не следует думать, что неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем, имеет место только в случае большой неизотермичности. Из уравнения (14.37) можно показать, что в области фазовых скоростей $\frac{\omega}{k_z} \gg v_{Te}$ неустойчивы поверхностные волны и при $T_e \lesssim T_i$. Это довольно легко понять, если заметить, что причина неустойчивости поверхностных волн в плазме с размытой границей по своей природе та же, что и неустойчивости дрейфовых волн, рассмотренных в § 13, а именно диамагнитные токи, обусловленные конечным ларморовским радиусом частиц и неоднородностью плазмы, приводят к раскачке колебаний в плазме.

В заключение заметим, что неустойчивость поверхностных волн может оказаться более опасной для магнитного удержания плазмы, чем дрейфовая неустойчивость, поскольку последняя приводит к возбуждению в плазме коротковолновых колебаний, локализованных в области неоднородности плазмы, в то время как неустойчивые поверхностные волны могут вызвать разрушение довольно большой области вблизи поверхности плазмы, проникая в плазму на глубину больше чем размер неоднородности самой поверхности.

Кроме того, следует отметить, что в последние годы поверхностные волны привлекают особое внимание как наиболее удобные для создания плазменных усилителей и генераторов электромагнитного излучения путем возбуждения таких волн электронными пучками в пространственно ограниченной плазме [82]. Изложенный выше метод анализа поверхностных волн, как мы надеемся, поможет читателю разбираться в большом потоке публикаций, посвященных этому кругу вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Г и н з б у р г, Распространение электромагнитных волн в плазме, «Наука», 1967 (имеется английский перевод, Pergamon Press, 1970, содержащий ряд уточнений).
2. В. П. С и л и н, А. А. Р у х а д з е, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961.
3. А. И. А х и е з е р, И. А. А х и е з е р, Р. В. П о л о в и н, А. Г. С и т е н к о, К. Н. С т е п а н о в, Электродинамика плазмы, «Наука», 1974.
4. А. Г. С и т е н к о, Электромагнитные флуктуации в плазме, Изд-во ХГУ, 1965.
5. Т. Х. С т и к с, Теория плазменных волн, Госатомиздат, 1965.
6. А. Б. М и х а й л о в с к и й, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1 и 2, Госатомиздат, 1971, 1972.
7. Сб. «Вопросы теории плазмы» под ред. акад. М. А. Л е о н т о в и ч а, т. 1—7, Госатомиздат, 1963—1973.
8. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
9. В. М. А г р а н о в и ч, В. Л. Г и н з б у р г, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии, «Наука», 1965.
10. Я. Л. А л ь п е р т, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, «Наука», 1972; Я. Л. А л ь п е р т, Волны и искусственные тела в приземной плазме, «Наука», 1974.
11. Я. Л. А л ь п е р т, А. В. Г у р е в и ч, Л. П. П и т а е в с к и й, Искусственные спутники в разреженной плазме, «Наука», 1964.
12. К. R a w e r, K. S u c h y, Hand. der Phys. 49/2, 1 (1967).
13. Е. Т и т ч м а р ш, Введение в теорию интегралов Фурье, ИЛ, 1948; J. D o i t s c h, Theorie und Anwendung der Laplace — Transformation, New York, Dover Publ., 1948.
14. Р. Б а л е с к у, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1965.
15. Х. А л ь ф в е н, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.

16. С. Чепман, Т. Коулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1963.
18. Дж. Гиббс, Основные принципы статистической механики, «Мир», 1964.
19. А. А. Власов, ЖЭТФ 8, 291 (1938).
20. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
21. Н. Н. Боголюбов, Динамические проблемы статистической физики, Гостехиздат, 1946.
22. Ю. Л. Климентович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд-во МГУ, 1964.
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
24. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971.
25. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 203 (1936).
26. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН 75, 79 (1962).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, «Наука», 1963.
28. A. Leonard, Ann. Phys. 10, 390 (1959).
29. R. Valessu, Phys. Fluids 3, 52 (1960).
30. В. П. Силин, ЖЭТФ 40, 1768 (1961).
31. J. Nibbard, Proc. Roy. Soc. A260, 114 (1961); A261, 85 (1961).
32. H. Grad, Comm. Pure and Appl. Math. 2 (1949); Механика 4, 5 (1952).
33. Б. М. Смирнов, Физика слабоионизованного газа, «Наука», 1972.
34. С. Браун, Элементарные процессы в плазме газового разряда, Госатомиздат, 1961.
35. P. Vaitnagar, E. Gross, M. Krook, Phys. Rev. 94, 511 (1954); E. Gross, M. Krook, Phys. Rev. 102, 593 (1956).
36. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 7, 1069 (1937).
37. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН 70, 201, 393 (1960).
38. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ 34, 242 (1958).
39. Л. М. Горбунов, УФН 109, 631 (1973).
40. В. Н. Фадеева, Н. Н. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятностей, Гостехиздат, 1954.
41. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН 96, 87 (1968).
42. И. С. Градштейн, И. И. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

43. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
44. K. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, 1961.
45. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР 69, 555 (1949).
46. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev. 75, 1851 (1949).
47. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН 107, 327 (1972); Природа № 2, 46 (1973).
48. Г. Валис, Е. Зауер, Д. Зюндер, С. Е. Росинский, А. А. Рухадзе, В. Г. Рухлин, УФН 113, 435 (1974).
49. А. А. Рухадзе, ЖТФ 31, 1236 (1961); 32, 669 (1962).
50. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия 11, 4 (1961).
51. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН 73, 701 (1961).
52. В. Л. Грановский, Электрический ток в газе, т. 1, Гостехиздат, 1952; т. 2, «Наука», 1971.
53. В. Е. Голант, УФН 65, 39 (1958).
54. А. В. Гуревич, А. В. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, «Наука», 1973.
55. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, Тр. ФИАН 61, 42 (1972).
56. В. П. Силин, Параметрическое взаимодействие, «Наука», 1973; УФН 108, 625 (1972).
57. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967; Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, 1971.
58. Е. Е. Ловецкай, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 48, 514 (1965).
59. H. Dreier, Phys. Rev. 115, 238 (1959); 117, 329 (1960); А. В. Гуревич, ЖЭТФ 39, 1296 (1960); А. В. Гуревич, Ю. Н. Живлюк, ЖЭТФ 49, 214 (1965); А. Н. Лебедев, ЖЭТФ 48, 1393 (1965).
60. E. A. Aба-Asali, В. А. Алтеркор, А. А. Рухадзе, Plasma Phys. 17, 218 (1975).
61. O. Vaneman, Phys. Rev. 115, 503 (1959).
62. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН 103, 609 (1971).
63. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 13, 105 (1973).
64. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН 82, 499 (1964).
65. Е. Л. Файнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Физматгиз, 1961.
66. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 4, 267 (1964).

67. В. Е. Г о л а н т, Сверхвысокочастотные методы диагностики плазмы, «Наука», 1968.
68. Л. С. Б о г д а н к е в и ч, Б. М и л и ч, А. А. Р у х а д з е, Ядерный синтез 7, 199 (1967).
69. Сб. «Физика высокотемпературной плазмы» под ред. А. С а й м о н а и У. Т о м с о н а, «Мир», 1972.
70. С. С. М о и с с е е в, И. С. Б а й к о в, Письма ЖЭТФ 4, 81, 299 (1966).
71. M. R o s e b l u t h, C. L o n g m i r e, Ann. Phys. 1, 120 (1957).
72. Л. А. А р ц и м о в и ч, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961; Д. Р о у з, М. К л а р к, Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции, Атомиздат, 1963.
73. Л. С. Б о г д а н к е в и ч, Е. Е. Л о в е ц к и й, А. А. Р у х а д з е, Ядерный синтез 6, 9, 171 (1966).
74. В. В. К а д о м т с е в, А. V. N e d o с р а с о в, J. Nucl. Energy 1, 230 (1960).
75. Б. Н. Г е р ш м а н, В. Ю. Т р а х т е н г е р ц, УФН 89, 87 (1966).
76. Ю. А. Р о м а н о в, Радиофизика 7, 242 (1964); 10, 1533 (1968). В. N u l t q u i s t, Space Science Revs 5, 599 (1966).
77. Ю. А. Р о м а н о в, Радиофизика 7, 242 (1964); 10, 1533 (1968).
78. А. Н. К о н д р а т е н к о, Ядерный синтез 5, 267 (1965); ЖТФ 36, 1943 (1966); 42, 743 (1972).
79. Я. Б. Ф а й н б е р г, Proc. Symposium CERN 1, 84 (1956); Я. Б. Ф а й н б е р г, М. Ф. Г о р б а г е н к о, ЖТФ 29, 549 (1959).
80. И. С. Б а й к о в, А. А. Р у х а д з е, ЖТФ 35, 913 (1965).
81. Е. Е. L o v e s k y, Nuclear Fusion 13, 331 (1973).
82. Б. И. А р о н о в, Л. С. Б о г д а н к е в и ч, А. А. Р у х а д з е, Plasma Phys. 17, 1052 (1975).

Гинзбург Виталий Лазаревич

Рухадзе Анри Амвросиевич

ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

(серия: «Современные проблемы физики»)

М., 1975 г., 256 стр. с илл.

Редактор *Д. А. Миртова*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректор *Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 31/І-1975 г.

Подписано к печати 2/VI 1975 г.

Бумага 84×108¹/₂, тип. № 1. Физ. печ. л. 8.

Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 14,34.

Тираж 6000 экз. Т-09231.

Цена книги 90 коп. Заказ № 1729.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»,

Москва, Шубинский пер., 10